

ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В  
МАКРОФИЗИКЕ  
Курс лекций

В. В. Лебедев

27 декабря 2004 г.

## Аннотация

В курсе лекций развивается теория флуктуационных явлений, связанных с макроскопическими степенями свободы. Наряду с критическими явлениями рассмотрены различные фазы конденсированного состояния, где флуктуации играют важную роль. Представлена также теория динамических флуктуаций, которая применяется как к равновесным, так и к неравновесным системам.

Монография предназначена для студентов и аспирантов физических факультетов университетов, а также для научных работников и специалистов, работающих в области высоких технологий, чьи интересы связаны с физикой конденсированных сред.

## Предисловие

В настоящем курсе лекций представлена теория явлений, связанных с флуктуациями параметров конденсированной среды, которые “живут” на масштабах, превышающих атомный размер. При некоторых условиях эти флуктуации существенно влияют на физические свойства вещества. Классическим примером такого рода являются флуктуации параметра порядка, которые определяют сингулярные вклады в термодинамические характеристики вещества в окрестности фазовых переходов второго рода. Мы представляем теорию критических флуктуаций, стартующую с разложения Ландау энергии по параметру порядка, и позволяющую учитывать флуктуационные эффекты в виде ряда теории возмущений по взаимодействию флуктуаций. Сначала мы рассматриваем проблему в пространстве размерности  $d = 4$ , где она допускает последовательное решение. В размерности  $d = 3$  флуктуации параметра порядка приводят к скейлингу (то есть степенному характеру зависимости различных величин друг от друга). Критические индексы, характеризующие эту зависимость, могут быть оценены в рамках так называемого  $\epsilon$ -разложения. Мы рассматриваем теорию слабой кристаллизации, где флуктуации кристаллизационного параметра порядка меняют природу фазового перехода по сравнению с теорией среднего поля, приводя к фазовому переходу первого рода. Тепловые длинноволновые флуктуации играют существенную роль в ряде фаз, вне зависимости от их близости к фазовому переходу. В смектиках эти флуктуации приводят к разрушению дальнего порядка и к логарифмической ренормировке модулей упругости. В двумерных ферромагнетиках флуктуации намагниченности порождают спонтанную щель в магнетонном спектре. В мембранах, которые являются двумерными объектами, погруженными в трехмерную жидкость, суще-

ственную роль играют изгибные флуктуации, которые приводят к логарифмической ренормировке упругих модулей мембраны. Специальный интерес представляет физика сверхтекучих пленок, где разрушение сверхтекучего состояния происходит за счет флуктуаций, связанных с локализованными объектами – квантовыми вихрями. Аналогичное явление должно наблюдаться в кристаллических и гексатических пленках. Мы рассматриваем также ряд динамических явлений, связанных с длинноволновыми флуктуациями, используя технику Уайлда. Первой в этом ряду стоит критическая динамика. Мы представляем простейший случай чисто релаксационной динамики параметра порядка, который демонстрирует все основные особенности явления. В двумерной гидродинамике тепловые флуктуации приводят к логарифмической ренормировке коэффициента вязкости и других кинетических коэффициентов. В свободно подвешенных пленках тепловые флуктуации определяют затухание всех гидродинамических мод. В неравновесной ситуации флуктуации изучаются на примере роста кристалла или распространения пламени, где флуктуации приводят к “огрублению” поверхности (фронта распространения). Рассмотрена также задача о пассивном скаляре, переносимым случайным (турбулентным) полем скорости, дающая еще один пример сильно неравновесной системы, для которой удастся получить информацию о статистике ее флуктуаций.

## Введение

Как известно, всякая физическая величина обладает как регулярным поведением, которое описывается гладкой функцией времени, удовлетворяющей определенным детерминистическим (дифференциальным) уравнениям, так и нерегулярным (хаотическим) поведением, которое представляет собой флуктуации около этой гладкой функции. Особенно сильны флуктуации на микроскопическом уровне, где следует различать квантовые и тепловые флуктуации. Например, квантовые флуктуации приводят к тому, что положение электрона в атоме является плохо определенной величиной. Поэтому его состояние следует описывать в терминах волновой функции, определяющей вероятность того или иного процесса. Что же касается тепловых флуктуаций, то можно упомянуть флуктуации скорости молекул газа, которые приводят к необходимости статистического описания (в рамках распределения Максвелла).

Нас будет интересовать роль флуктуаций таких параметров, как температура, плотность, намагниченность, которые относятся к физической системе в целом или к ее отдельным, но макроскопическим

частям (содержащим большое число микрочастиц, то есть атомов или молекул). Роль квантовых эффектов в этой ситуации, как правило, пренебрежимо мала. Что же касается тепловых флуктуаций, то для макроскопических величин они также обычно слабее, чем для отдельных микрочастиц. Тем не менее, имеется ряд случаев, когда тепловые флуктуации играют значительную роль и в макроскопике. Пожалуй, наиболее известным примером такого рода являются критические флуктуации, которые приводят к появлению сингулярных вкладов в термодинамические величины системы вблизи фазового перехода второго рода или вблизи критической точки. Особой задачей является изучение флуктуаций в ситуации, когда система далека от теплового равновесия (отклонение от которого вызывается тем или иным внешним воздействием). В качестве примера можно привести рост кристалла из расплава, который является процессом релаксации к равновесию, когда макроскопические флуктуации являются существенно неравновесными. Другим примером такого рода является турбулентность, то есть состояние жидкости или газа, характеризующееся сильными флуктуациями скорости.

В любом случае исследование флуктуаций, в силу их нерегулярности, требует статистического подхода, то есть они должны характеризоваться некоторыми средними. Как правило, речь идет о величинах, найденных усреднением по значительным временным интервалам. Но зачастую вместо временного усреднения используется усреднение пространственное. Здесь возникает непростой вопрос о соотношении этих двух способов усреднения, который, вообще говоря, требует специального исследования для каждой конкретной системы. Можно утверждать, что полученные разными способами средние совпадают для эргодических систем, динамика которых устроена так, что достаточно быстро “заметается” все фазовое пространство (или та его часть, где формируются средние). Обсуждение общих вопросов, касающихся статистики различных систем, можно найти в монографиях [1, 2, 3]. В дальнейшем мы будем предполагать свойство эргодичности выполненным, и не будем поэтому различать результаты разных способов усреднения, говоря просто о средних величинах. Мы обозначаем их угловыми скобками. Например, среднее от параметра  $\psi$  обозначается  $\langle \psi \rangle$ . Здесь  $\psi$  может быть такой макроскопической величиной, как давление, плотность, скорость, или параметром порядка, разные типы которого необходимы для описания многообразных фаз, реализуемых в конденсированном состоянии. Например, параметром порядка сверхтекучей жидкости является волновая функция Бозе-конденсата.

Мы будем иметь дело с параметрами, которые изменяются во времени и пространстве (на масштабах, намного превышающих атомные

размеры). Детальную информацию о системе несут корреляционные функции характеризующих ее параметров. Например, парная корреляционная функция параметра  $\psi$  определяется, как следующее среднее:  $\langle \psi(t_1, \mathbf{r}_1) \psi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$ . Для однородной (по времени и пространству) системы эта корреляционная функция зависит только от разностей времен  $t_1 - t_2$  и координат  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Поэтому среднее здесь можно понимать, как среднее по времени  $t_1$  при фиксированной разности  $t_1 - t_2$ , или как среднее по  $\mathbf{r}_1$  при фиксированной разности  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Если система пространственно неоднородна, то в парной корреляционной функции появляется зависимость также и от полусуммы  $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ . Тогда усреднение надо понимать, как среднее по времени. Тем не менее, пространственное усреднение можно использовать и в неоднородном пространственном случае, если характерная длина этой неоднородности велика по сравнению с корреляционной длиной корреляционных функций. Тогда пространственное среднее следует понимать, как усреднение по масштабам меньшим, чем характерный размер неоднородности.

Усреднение приводит к некоторой функции распределения вероятности, которая определяет вероятность той или иной реализации флуктуирующих величин. Для равновесного случая одновременные корреляционные функции (взятые при совпадающих временах) можно вычислять, исходя из распределения Гиббса, точнее, используя его макроскопический аналог, построенный на основе разложения Ландау. Однако уже для вычисления разновременных корреляционных функций (при несовпадающих временах) распределения Гиббса оказывается недостаточно, для этого необходимо знать также макроскопические динамические (гидродинамические) уравнения системы. При этом, в зависимости от типа динамики, разновременные корреляционные функции могут оказаться различными для разных систем, даже если их одновременные корреляционные функции совпадают. В неравновесном же случае даже одновременные корреляционные функции невозможно вычислить без знания динамики системы. При этом оказывается существенным также способ возбуждения неравновесности, которая может вызываться непрерывным внешним воздействием или “ударным” воздействием, в результате которого формируется неравновесное состояние, постепенно релаксирующее к равновесию.

Мы начинаем с теории фазовых переходов второго рода. Еще в тридцатые годы 20 века Ландау ввел ключевое для фазовых переходов понятие параметра порядка и построил то, что сейчас называют теорией среднего поля, основываясь на разложении энергии системы по параметру порядка вблизи точки фазового перехода. Однако уже в сороковые-пятидесятые годы стало ясно, что вблизи фазового перехода второго рода важны флуктуации параметра порядка. Это бы-

ло подтверждено экспериментально в шестидесятые-семидесятые годы, когда были измерены различные термодинамические характеристики вещества вблизи фазовых переходов второго рода. В частности, эксперимент показал, что теплоемкость неограниченно возрастает при приближении к температуре перехода, в то время как теория среднего поля предсказывает скачок теплоемкости в точке перехода. Эксперимент привел к концепции скейлинга, который заключается в степенном характере зависимости различных величин друг от друга вблизи точки фазового перехода второго рода. Были введены так называемые критические индексы, которые характеризуют такую зависимость.

Уже в шестидесятые годы была построена феноменология, позволяющая связывать различные критические индексы между собой. Однако понимание явления скейлинга было достигнуто только в семидесятые годы, оно было связано с работами Вильсона по так называемому  $\epsilon$ -разложению. Эта техника разбирается в настоящем курсе. Нельзя сказать, что на сегодняшний день мы обладаем последовательной теорией фазовых переходов. Но, по крайней мере, есть уверенность в том, что существующая теория правильно отражает качественные аспекты поведения физических систем вблизи фазовых переходов второго рода. Понятна также причина универсальности, проявляющаяся в том, что критические индексы оказываются идентичными для систем самой разной физической природы (имеется несколько так называемых классов универсальности, каждый из которых характеризуется своим собственным набором критических индексов).

Интересна гипотеза, высказанная Поляковым, согласно которой сильное взаимодействие флуктуаций вблизи точки фазового перехода приводит к повышению симметрии системы, приводя в частности к конформной симметрии. В трехмерном случае эта симметрия накладывает некоторые ограничения на корреляционные функции параметра порядка. В двумерном же случае (который соответствует фазовым переходам в пленках или слоях) конформная симметрия является бесконечномерной, и потому накладывает столь многочисленные связи на корреляционные функции, что позволяет найти все основные характеристики системы (например, критические индексы) [4]. Развитие этой идеи породило целую отрасль науки, называющейся конформной теорией поля и отраженной в обширной литературе. К сожалению, она лежит вне рамок наших лекций. Мы не касаемся также деятельности, посвященной решеточным моделям (в основном двумерным) фазовых переходов (смотри [5]).

Проблема фазовых переходов возбудила большой интерес к роли флуктуаций в макроскопической физике. В семидесятые-восемидесятые годы был найден и исследован целый ряд систем, где такие флукту-

ации играют существенную роль в формировании физических характеристик системы. Работы Березинского и Костерлица-Таулесса привели к созданию теории фазового перехода в пленках сверхтекучей жидкости (гелия-4), где главную роль в разрушении сверхтекучести играет распаривание связанных пар вихрь-антивихрь. Аналогичный механизм приводит к разрушению кристаллического и гексатического порядка в двумерных системах. Бразовский осознал большую роль флуктуаций кристаллического параметра порядка вблизи слабокристаллизационных фазовых переходов, эти флуктуации определяют характер фазового перехода из жидкости в кристалл (а, точнее, целую серию фазовых переходов), который обязательно оказывается переходом первого рода. В смектической фазе (которая является фазой с одномерной модуляцией плотности) изгибные флуктуации слоев приводят к логарифмической ренормировке модулей упругости смектиков. Изгибные флуктуации оказываются существенными и в физике мембран, которые представляют собой двойные слои липидных молекул, которые можно рассматривать, как двумерные объекты, погруженные в трехмерную жидкость. Эти изгибные флуктуации приводят к логарифмической ренормировке модулей упругости мембраны. В двумерных ферромагнетиках флуктуации направления намагниченности приводят к появлению спонтанной щели в спектре флуктуаций.

Все перечисленные случаи разбираются в настоящем курсе. Это возможно сделать с единой точки зрения, на основе ренорм-группового формализма. При этом, как и в квантовой теории поля, возможны две различные ситуации. Одна из них заключается в том, что эффективная константа связи падает с увеличением масштаба (этот случай реализуется в смектиках). Такая ситуация аналогична нуль-зарядному поведению, впервые обнаруженному в квантовой электродинамике [6]. В другой ситуации (которая реализуется в мембранах и двумерных ферромагнетиках) эффективная константа связи растет с увеличением масштаба. Тогда теория возмущений перестает работать на больших масштабах. Самый известный тип такого поведения – конфайнмент в квантовой хромодинамике (теории сильных взаимодействий).

Особой задачей является вычисление разновременных корреляционных функций, которые несут в себе информацию о динамике системы. Для этого необходимо использовать технику Уайлда, развитую первоначально в рамках теории турбулентности [7]. Мы представляем исследование критической динамики, сосредоточившись на частном случае чисто релаксационной динамики параметра порядка. На этом простейшем примере видны все особенности теории критической динамики. Мы рассматриваем также двумерную гидродинамику, где тепловые флуктуации приводят к логарифмической ренормировке ко-

эффициентов вязкости. Та же техника Уайлда применима и для неравновесных систем. В качестве примера мы рассматриваем так называемую проблему KPZ (Kardar-Parisi-Zhang), которая возникает из таких задач, как рост кристалла из расплава или распространение фронта пламени. Отметим, что двумерная гидродинамика относится к нуль-зарядному типу, в то время как в проблеме KPZ имеется асимптотическая свобода.

В курсе разбирается также задача о корреляционных функциях пассивного скаляра во внешнем случайном (турбулентном) поле скорости. Эта задача относится к широкому классу задач о статистических свойствах сильно неравновесных систем, каноническим примером которых является гидродинамическая турбулентность. Построение теории таких систем далеко от своего завершения, что связано с сильным взаимодействием флуктуаций, внутренне присущим существенно неравновесному состоянию. В случае, когда пассивный скаляр “живет” на масштабах меньше длины корреляции скорости, можно получить детальную информацию о его корреляционных функциях, что выгодно отличает задачу о пассивном скаляре от других задач типа турбулентности. Найденное решение иллюстрирует такое характерное для неравновесных систем явление, как сильную перемежаемость. Можно надеяться, что эта задача послужит прообразом для решения других неравновесных задач.

Настоящий текст написан на основе лекций, которые автор в течение многих лет читал для студентов кафедры МФТИ “Проблемы Теоретической Физики” при Институте Теоретической Физики имени Л. Д. Ландау РАН. Мы надеемся, что наш курс будет способствовать расширению кругозора студентов общезначимых специальностей, а студенты, специализирующиеся в области теоретической физики, могут использовать его в качестве учебника. В соответствии с данной спецификой текст содержит ссылки на основополагающие работы, а также на обзоры и монографии, то есть приведенный нами список литературы ни в коем случае нельзя считать исчерпывающим.



# Лекция 1

## Теория Ландау

В конденсированном состоянии при изменении температуры или давления происходит множество фазовых переходов. Традиционно они делятся на фазовые переходы первого рода (с конечной скрытой теплотой) и фазовые переходы второго рода (с нулевой скрытой теплотой) [3], последние называются еще непрерывными. Эта классификация отнюдь не является исчерпывающей, но вполне достаточна для большинства практических нужд. Мы приступаем к изложению теории фазовых переходов второго рода, в окрестности которых наблюдаются сильные флуктуации различных величин. Эта теория в значительной мере применима также к окрестностям критических точек (таких, как критическая точка на диаграмме газ-жидкость).

Основы теории фазовых переходов второго рода были заложены в тридцатые годы двадцатого века Л. Д. Ландау [8]. Центральным понятием в теории Ландау является так называемый параметр порядка, который мы будем обозначать  $\varphi$ . Параметр порядка связан с симметрией природой фазовых переходов второго рода. А именно, при понижении температуры в точке фазового перехода происходит спонтанное (самопроизвольное) нарушение (понижение) симметрии системы, связанное с появлением ненулевого среднего значения параметра порядка.

Параметр порядка может иметь различную физическую природу. Упомянем, как примеры параметров порядка, намагниченность (для ферромагнитного фазового перехода), волновую функцию Бозе-конденсата атомов (для сверхтекучего перехода) или электронных пар (для сверхпроводящего перехода), взаимное смещение подрешеток кристалла (для сегнетоэлектрического перехода). В окрестности критической точки системы газ-жидкость роль, аналогичную роли параметра порядка для фазовых переходов второго рода, играет отклонение

плотности вещества от ее критического значения. В приведенных примерах число компонент параметра порядка  $n$  варьируется от одного до трех. А именно,  $n = 1$  для одноосного сегнетоэлектрического перехода,  $n = 2$  для сверхтекучего или сверхпроводящего перехода (в этом случае параметр порядка является комплексным, что эквивалентно двум компонентам),  $n = 3$  для ферромагнитного перехода. Бывают случаи, когда параметр порядка имеет еще больше компонент. Так, например, для жидкокристаллического фазового перехода параметр порядка является неприводимым симметричным тензором, то есть имеет пять независимых компонент,  $n = 5$ .

## 1.1 Разложение Ландау

Как известно, полную информацию о статистических свойствах системы несут корреляционные функции (флуктуирующих) полей, характеризующих эту систему. Вблизи точек фазового перехода второго рода основную роль играют флуктуации параметра порядка  $\varphi$ . Поэтому основной задачей теории фазовых переходов является исследование корреляционных функций  $\varphi$ .

По самому своему смыслу параметр порядка является макроскопической величиной, связанной с коллективными свойствами атомов, составляющих среду. Соответственно, параметр порядка может изменяться на масштабах, намного превышающих атомный (молекулярный) размер. Поэтому параметр порядка можно записать в виде разложения Фурье

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_q \varphi_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, а волновые вектора  $\mathbf{q}$  имеют величину существенно меньше, чем обратный атомный размер. Для системы данного размера число слагаемых в сумме (1.1) велико, но конечно. Вообще говоря, параметр порядка является также функцией времени  $t$ .

Для вычисления корреляционных функций параметра порядка можно стартовать с функции распределения вероятности тех или иных реализаций параметра порядка. Хорошо известно, что в равновесных системах относительная вероятность различных микроскопических состояний определяется распределением Гиббса, которое имеет вид [3]

$$\exp\left(\frac{F - \hat{\mathcal{H}}}{T}\right). \quad (1.2)$$

Здесь квантовый оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  – Гамильтониан системы,  $F$  – ее свободная энергия, и  $T$  – температура. Суммируя функцию распределения

(1.2) по микроскопическим степеням свободы при данном значении параметра порядка  $\varphi(\mathbf{r})$ , мы приходим к макроскопической функции распределения вероятности

$$\mathcal{P}(\varphi) = \exp\left(\frac{F - \mathcal{F}}{T}\right), \quad (1.3)$$

где  $\mathcal{F}$  является некоторым функционалом от  $\varphi$ , который мы будем называть функционалом Ландау. Функция распределения (1.3) определяет одновременные корреляционные функции  $\varphi$ . Например, среднее значение  $\langle \varphi \rangle$  параметра порядка задается следующим интегралом

$$\langle \varphi \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(\frac{F - \mathcal{F}}{T}\right) \varphi. \quad (1.4)$$

Здесь  $\int \mathcal{D}\varphi$  обозначает функциональный интеграл, который может интерпретироваться, как многократный интеграл  $\prod_q \int d\varphi_q$  по коэффициентам разложения (1.1). Правила обращения с функциональными интегралами будут сформулированы нами по ходу изложения (смотри также монографии [9, 10]). Условие нормировки (суммарной единичной вероятности) для функции распределения (1.3) гласит

$$\exp(-F/T) = \int \mathcal{D}\varphi \exp(-\mathcal{F}/T). \quad (1.5)$$

Это соотношение дает принципиальный метод вычисления свободной энергии  $F$ .

Как мы уже упоминали, свободная энергия  $F$  имеет сингулярность в точке фазового перехода второго рода. В отличие от свободной энергии, функционал Ландау  $\mathcal{F}$  является аналитической функцией параметра порядка  $\varphi$ , поскольку получается при исключении микроскопических степеней свободы на фоне данного (и медленно меняющегося в пространстве) параметра порядка. Сингулярность же возникает за счет длинноволновых степеней свободы при интегрировании в соответствии с соотношением (1.5). Аналитичность функционала Ландау  $\mathcal{F}$  по параметру порядка позволяет использовать его разложение в ряд по  $\varphi$ , которое хорошо работает в окрестности фазового перехода (где параметр порядка мал). В результате функционал Ландау  $\mathcal{F}$  записывается в виде суммы  $\mathcal{F}_{reg} + \mathcal{F}_{add}$ , где  $\mathcal{F}_{reg}$  — некоторая регулярная функция температуры  $T$ , независимая от  $\varphi$ , а  $\mathcal{F}_{add}$  представляет разложение по  $\varphi$ . Предположим, что нечетные члены этого разложения отсутствуют в силу той или иной симметрии (что характерно для фазовых переходов второго рода). Тогда первые два члена разложения функционала

Ландау для скалярного параметра порядка имеют вид

$$\mathcal{F}_a = \int d^3r \frac{a}{2} \varphi^2, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{F}_\lambda = \int d^3r \frac{\lambda}{24} \varphi^4, \quad (1.7)$$

где  $a$  и  $\lambda$  – некоторые коэффициенты. Параметр  $a$  может иметь различный знак, в то время как параметр  $\lambda$  предполагается положительным (в противном случае надо принимать во внимание более высокие члены разложения функционала Ландау по  $\varphi$ ). Локальность приведенных выражений связана с тем, что параметр порядка “живет” на больших масштабах, в то время как функционал Ландау формируется за счет интегрирования по микроскопическим (мелкомасштабным) степеням свободы.

Если  $a > 0$  и  $a$  не содержит никакой специальной малости, то флуктуации параметра порядка связаны с большой энергией и потому сильно подавлены. В этом случае, который соответствует температуре существенно выше точки фазового перехода, четверной член (1.7) оказывается несущественным. Отметим, что именно такая ситуация имеет место для термодинамических флуктуаций давления, плотности массы и так далее [3]. При температурах существенно ниже точки перехода параметр порядка не является малым, и потому нельзя ограничиваться первыми членами разложения функционала Ландау (1.6, 1.7). Рассмотрение в терминах членов разложения (1.6, 1.7) возможно при малых  $|a|$ , то есть как раз в окрестности точки фазового перехода  $T_c$ , где  $a$  обращается в ноль. Вблизи температуры перехода величина  $a$  может быть разложена по  $T - T_c$ , главный член этого разложения имеет вид

$$a = \alpha(T - T_c). \quad (1.8)$$

Отметим, что  $\alpha > 0$  в соответствии с тем, что коэффициент  $a$  положителен выше температуры перехода  $T_c$  и отрицателен ниже этой температуры. (Впрочем, изредка встречаются случаи, когда фазовый переход с образованием ненулевого среднего параметра порядка происходит при повышении температуры, тогда  $\alpha < 0$ .)

Теперь мы учтем энергию неоднородности параметра порядка. Такого сорта неоднородность может быть навязана внешним воздействием, и неизбежно возникает флуктуационно, а потому связанный с ней вклад в функционал Ландау обязательно должен быть принят во внимание. Квадратичным по параметру порядка вкладом, который чувствителен к неоднородности параметра порядка, является градиентный член

$$\mathcal{F}_{grad} = \int d^3r \frac{b}{2} (\nabla \varphi)^2, \quad (1.9)$$

который следует включить в разложение функционала Ландау  $\mathcal{F}$  по  $\varphi$ , наряду с вкладами (1.6,1.7). Отметим, что градиентный член (1.9) является первым членом разложения функционала Ландау по отношению атомного (молекулярного) размера к характерному масштабу неоднородности параметра порядка. Это отношение по самому смыслу параметра порядка является малым, так как параметр порядка определен на масштабах, намного превышающих атомный. Формальная причина, по которой малую поправку (1.9) следует принимать во внимание наряду с (1.6), заключается в малости  $a$ , то есть оправдано в окрестности фазового перехода. Далее мы полагаем  $b > 0$  (иначе следует принимать во внимание более высокие члены разложения функционала Ландау по градиентам).

Выше мы считали, что параметр порядка является скалярной величиной, то есть число его компонент  $n$  равно 1. Если же число компонент параметра порядка  $n$  больше единицы, то  $\varphi^2$  в выражении (1.6) следует понимать как  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots$ , а  $\varphi^4$  в (1.7) следует понимать, как  $(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots)^2$ . Соответственно,  $(\nabla\varphi)^2$  в (1.9) следует понимать, как  $(\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_2)^2 + \dots$ . Вообще говоря, такие выражения подразумевают, что система обладает некоторой симметрией, приводящей к инвариантности функционала Ландау относительно вращений в “изотопическом” пространстве (пространстве компонент параметра порядка). Например, для волновой функции Бозе-конденсата, которая является параметром порядка для сверхтекучего фазового перехода, инвариантность энергии относительно сдвига фазы этой волновой функции приводит к тому, что действительная и мнимая части волновой функции (которые являются двумя компонентами параметра порядка) равноправно входят во все выражения. Далее, если специально не оговорено обратное, мы подразумеваем приведенные выше выражения для многокомпонентного параметра порядка.

Если число компонент  $n$  параметра порядка равно 2, то удобно ввести комплексное поле

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = |\psi| \exp(i\phi), \quad (1.10)$$

где  $\phi$  – фаза  $\psi$ . Именно такое представление наиболее естественно для свехпроводящего и для сверхтекучего фазовых переходов [11, 12, 13]. В этих случаях функционал Ландау должен быть инвариантен относительно сдвига фазы параметра порядка  $\phi \rightarrow \phi + \text{const}$ , что и объясняет отсутствие в этом функционале нечетных по  $\psi$  членов разложения. После подстановки (1.10) в (1.6,1.7,1.9) мы получаем

$$\mathcal{F}_{add} = \int d^3r [a|\psi|^2 + b(\nabla|\psi|)^2 + \lambda|\psi|^4/6 + b|\psi|^2(\nabla\phi)^2]. \quad (1.11)$$

Это выражение прямо применимо для перехода  ${}^4\text{He}$  в сверхтекучее состояние, в то время как для сверхпроводящего перехода требуется включить в рассмотрение взаимодействие Бозе-конденсата электронных пар с электромагнитным полем. Соответствующий обобщенный функционал называют обычно функционалом Гинзбурга-Ландау.

Окрестность критической точки газ-жидкость может быть изучена аналогично окрестности фазового перехода второго рода. Для критической точки роль параметра порядка  $\varphi$  играет отклонение плотности вещества от ее значения в критической точке. В этом случае появляются нечетные члены разложения  $\mathcal{F}$  по  $\varphi$ . Первые (главные) такие члены имеют вид

$$\int d^3r \left( -h\varphi - \frac{\mu}{6}\varphi^3 \right), \quad (1.12)$$

где  $h$  и  $\mu$  – коэффициенты разложения. Вклад (1.12) должен быть добавлен к (1.6, 1.7), что дает новое (расширенное) выражение для  $\mathcal{F}_{add}$ . Член третьего порядка может быть устранен из  $\mathcal{F}_{add}$  простым сдвигом  $\varphi \rightarrow \varphi + \mu/\lambda$ . Тогда мы приходим к следующему функционалу Ландау

$$\mathcal{F}_{add} = \int d^3r \left[ -h\varphi + \frac{a}{2}\varphi^2 + \frac{b}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{\lambda}{24}\varphi^4 \right], \quad (1.13)$$

с переопределенными (несколько сдвинутыми) значениями  $a$  и  $h$ . Разложение (1.13) справедливо, если характерное значение  $\varphi$  мало, для этого как  $a$ , так и  $h$  в (1.13) должны быть малы. Таким образом, речь идет об окрестности некоторой точки на  $P-T$  диаграмме системы, которая определяется условиями  $a = 0$  и  $h = 0$ , и является не чем иным, как критической точкой. Для сравнения заметим, что для фазовых переходов второго рода на  $P-T$  диаграмме имеется целая линия фазовых переходов (которая определяется условием  $a = 0$ ).

Аналогичным (1.13) функционалом Ландау описывается ферромагнетик во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$ . В этом случае параметром порядка является, как мы уже отмечали, намагниченность  $\mathbf{M}$ . Во внешнем магнитном поле имеется дополнительный вклад в энергию ферромагнетика с плотностью  $-\mathbf{H}\mathbf{M}$ , который надо включить в функционал Ландау. Таким образом, как и в выражении (1.13), в функционале Ландау возникает линейный по параметру порядка вклад.

## 1.2 Теория среднего поля

В этом разделе мы рассматриваем так называемую теорию среднего поля. Она соответствует ситуации, когда флуктуации параметра порядка  $\varphi$  около своего среднего значения  $\langle\varphi\rangle$  слабы. Формально это

означает, что интеграл (1.5) определяется узкой окрестностью  $\langle\varphi\rangle$ . В свою очередь, значение  $\langle\varphi\rangle$  определяется абсолютным минимумом функционала Ландау. Поэтому, в частности,  $\langle\varphi\rangle$  является однородным, поскольку его неоднородность в соответствии с (1.9) приводит к появлению дополнительного положительного вклада в энергию. В теории среднего поля свободная энергия  $F$  весьма просто связана с функционалом Ландау,  $F = \mathcal{F}(\langle\varphi\rangle)$ .

Рассмотрим окрестность точки фазового перехода второго рода. Подставляя однородное значение  $\langle\varphi\rangle$  в (1.6, 1.7), мы находим следующее выражение [3, 8, 14]

$$F = \mathcal{F}(\langle\varphi\rangle) = \mathcal{F}_{reg} + V \left( \frac{a}{2} \langle\varphi\rangle^2 + \frac{\lambda}{24} \langle\varphi\rangle^4 \right), \quad (1.14)$$

где  $V$  – объем системы. Чтобы найти  $\langle\varphi\rangle$ , мы должны найти минимум выражения (1.14). Этот минимум достигается при  $\langle\varphi\rangle = 0$ , если  $a > 0$ , и при  $\langle\varphi\rangle = \pm\sqrt{6|a|/\lambda}$ , если  $a < 0$ . Мы видим, что  $\langle\varphi\rangle \propto \sqrt{|a|}$  и, следовательно, значение  $\langle\varphi\rangle$  мало вблизи точки перехода (которая соответствует  $a = 0$ ). Подстановка найденного значения  $\langle\varphi\rangle$  в (1.14) показывает, что в приближении среднего поля  $F = \mathcal{F}_{reg}$ , если  $a > 0$ , и

$$F = \mathcal{F}_{reg} - \frac{3a^2}{\lambda} V = \mathcal{F}_{reg} - \frac{3\alpha^2}{2\lambda} (T - T_c)^2 V, \quad (1.15)$$

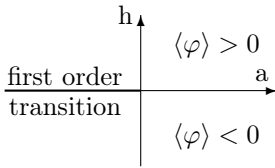
если  $a < 0$ . Вычисляя энтропию  $S = -\partial F/\partial T$  и, далее, теплоемкость  $C_V = T\partial S/\partial T$ , мы заключаем, что в точке перехода теплоемкость испытывает скачок

$$\Delta C_V = 3V\alpha^2 T_c/\lambda. \quad (1.16)$$

Теперь мы переходим к рассмотрению окрестности критической точки, которая может быть изучена в рамках выражения (1.13). Значение  $\langle\varphi\rangle$  определяется абсолютным минимумом  $\mathcal{F}_{add}(\langle\varphi\rangle)$ . Подставляя однородное значение  $\langle\varphi\rangle$  в (1.13) и варьируя по  $\langle\varphi\rangle$ , мы получаем следующие условия экстремума

$$a\langle\varphi\rangle + \lambda\langle\varphi\rangle^3/6 = h. \quad (1.17)$$

Приведем решение уравнения (1.17) в различных предельных случаях. Если  $a^3 \gg \lambda h^2$ , то  $\langle\varphi\rangle \simeq h/a$ , если  $\lambda h^2 \gg |a|^3$ , то  $\langle\varphi\rangle \simeq (6h/\lambda)^{1/3}$ . Если  $a$  отрицательно и  $|a|^3 \gg \lambda h^2$  то  $\langle\varphi\rangle \simeq \pm\sqrt{6|a|/\lambda}$ , где знак  $\langle\varphi\rangle$  определяется знаком  $h$ . Мы приходим к выводу, что при  $h = 0$  (и  $a < 0$ ) значение  $\langle\varphi\rangle$  испытывает скачок, равный  $2\sqrt{6|a|/\lambda}$ . Наличие такого скачка соответствует фазовому переходу первого рода. Таким образом, мы приходим к фазовой диаграмме, изображенной на рисунке 1.1. Фазовая диаграмма на плоскости  $P - T$  будет иметь такую же

Рис. 1.1: Фазовая диаграмма на плоскости  $a - h$ .

топологию, хотя линия фазовых переходов уже не будет прямой. Мы заключаем, что критическая точка (где  $a = h = 0$ ) завершает линию фазовых переходов первого рода (между паром и жидкостью).

Аналогичный вид имеет фазовая диаграмма ферромагнетика во внешнем магнитном поле на плоскости  $H - T$ . Только теперь фазовые переходы первого рода (соответствующие скачку намагниченности) при  $T < T_c$  происходят при нулевом значении реального магнитного поля  $H$ . Во избежание недоразумений отметим здесь следующее. Во-первых, как и для всяких переходов первого рода, при изменении магнитного поля возможно явление гистерезиса, то есть фазовый переход при  $T < T_c$  может реально происходить при ненулевом поле. Во-вторых, сказанное относится к монокристаллическому ферромагнетiku, точнее к случаю, когда его собственным магнитным полем можно пренебречь. Это справедливо в некоторой окрестности точки Кюри  $T_c$ , но условия применимости этого приближения требуют дополнительного исследования.

Вообще говоря, значение  $\langle \varphi \rangle$  может быть и неоднородным. Зависимость  $\langle \varphi \rangle$  от координат может быть вызвана внешним воздействием, например, неоднородным внешним полем или дефектом кристаллической решетки, а также влиянием границы (стенок). Неоднородность параметра порядка может возникнуть и спонтанно (ниже мы обсуждаем такую возможность). При наличии неоднородности вступает в игру градиентная энергия (1.9). Сравнивая между собой вклады (1.9) и (1.6), мы заключаем, что имеется характерная длина

$$r_c = \sqrt{b/|a|}, \quad (1.18)$$

которая входит в пространственную зависимость параметра порядка в теории среднего поля. На масштабах больше, чем  $r_c$ , градиентная энергия становится малой поправкой по сравнению с однородной энергией. Величину  $r_c$  называют корреляционной длиной или корреляционным радиусом. Отметим, что в соответствии с (1.18)  $r_c$  неограниченно растет при приближении к точке перехода.

Несколько слов об условиях применимости приближения средне-



го поля. Параметр порядка становится “мягче” при уменьшении  $|a|$ , так как уменьшается энергия, связанная с флуктуациями  $\varphi$ . Поэтому в некоторой окрестности точки фазового перехода второго рода, где флуктуации параметра порядка становятся сильными, теория среднего поля перестает работать. Количественный критерий для применимости теории среднего поля будет выведен в следующей лекции, где мы начинаем изучать роль флуктуаций параметра порядка.

## 1.3 Низкотемпературная фаза

Сформулируем теперь, какие особенности простой картины среднего поля сохраняются и с учетом флуктуаций параметра порядка, а какие должны быть модифицированы.

Прежде всего, остается в силе то фундаментальное свойство, что выше точки перехода второго рода среднее значение параметра порядка  $\langle \varphi \rangle$  равно нулю, а ниже точки перехода возникает ненулевое среднее. Это утверждение требует, однако, дополнительных комментариев. Если вычислить интеграл в правой части (1.4) с функционалом Ландау, инвариантным относительно  $\varphi \rightarrow -\varphi$  (а именно такой функционал брался выше для фазовых переходов второго рода), то результат, очевидно, будет равен нулю. Отсюда мы немедленно заключаем, что  $\langle \varphi \rangle$  равен нулю и ниже точки перехода.

Попробуем разобраться в ситуации на примере скалярного параметра порядка. Ниже точки перехода в функционале Ландау имеется два симметричных минимума, соответствующих разным знакам  $\varphi$ . Если наблюдать систему в течении некоторого времени, то в каждый данный момент она будет находиться в состоянии, определяемым окрестностью одного из минимумов, и только изредка переходить в состояние, соответствующее другому минимуму. Нулевое же значение  $\langle \varphi \rangle$  на этом языке означает усреднение по таким большим временам, что число перебросов туда-сюда велико и  $\varphi$  с равной вероятностью принимает положительные и отрицательные значения. Однако переходы системы между состояниями, соответствующими окрестностям минимумов, происходит с вероятностью, пропорциональной  $\exp(-U/T)$ , где  $U$  – высота потенциального барьера, разделяющего минимумы. Как следует из приведенных выше формул,  $U$  пропорционально объему системы. Этот закон надо несколько уточнить (смотри ниже), но в любом случае  $U$  оказывается намного больше температуры  $T$ , так что множитель  $\exp(-U/T)$  очень мал. Поэтому время между переходами системы из состояния в состояние чрезвычайно велико, оно всегда оказывается гораздо больше, чем время наблюдения. Таким образом, реальные времена просто недостаточны для полного усреднения. Дру-

гими словами, система всегда наблюдается в состоянии, соответствующему флуктуациям около одного из минимумов. И тогда  $\langle\varphi\rangle$  не равно нулю. На формальном языке это означает, что интеграл в правой части (1.4) надо брать по ограниченной области фазового пространства. Аналогична ситуация и для многокомпонентных параметров порядка.

Разумеется, с учетом флуктуаций параметра порядка его среднее  $\langle\varphi\rangle$  отлично от своего среднеполевого значения. Характер же этих флуктуаций существенно зависит от масштаба. На масштабах меньше корреляционного радиуса (величина которого  $r_c$  также чувствительна к флуктуациям и потому отличается, вообще говоря, от своего среднеполевого значения) эти флуктуации могут быть довольно большими по величине. На масштабах же больше корреляционного радиуса включается механизм однородной релаксации параметра порядка к своему равновесному значению, который сильно подавляет флуктуации параметра порядка. Можно сказать, что параметр порядка “замерзает” на масштабах больше, чем  $r_c$ . Это утверждение, однако, требует уточнения, поскольку на этих масштабах остаются степени свободы параметра порядка, которые не “замерзают”. Их характер различен для разного числа компонент параметра порядка.

Мы начнем со случая  $n = 1$ . В этом случае равновесное значение  $\langle\varphi\rangle$  определено с точностью до знака. Поэтому возможна такая ситуация, когда в разных областях пространства  $\langle\varphi\rangle$  имеет разные знаки. Эти области разделяются поверхностями, где  $\langle\varphi\rangle = 0$ ,  $\langle\varphi\rangle$  существенно изменяется на длине порядка  $r_c$  вблизи этой поверхности. Такую структуру (по аналогии с ферромагнетиками) можно назвать доменной стенкой, ее толщина определяется  $r_c$ . Вернемся теперь к вопросу об изменении знака  $\langle\varphi\rangle$  во всем образце. Это может быть сделано за счет процесса, когда на фоне данного однородного значения  $\langle\varphi\rangle$  появляется зародыш с другим знаком, который затем распространяется на весь объем за счет движения доменной стенки. Такой механизм гораздо более вероятен, чем одновременное изменение знака  $\langle\varphi\rangle$  во всем образце, поскольку предполагает преодоление гораздо меньших потенциальных барьеров. Тем не менее, по ходу дела требуется создание доменной стенки с размерами порядка размеров образца, энергия которой гораздо больше температуры. Поэтому даже этот усовершенствованный процесс является весьма маловероятным.

Рассмотрим теперь параметр порядка с  $n = 2$ . Нам удобнее будет иметь дело с комплексным представлением, введенным (1.10). На масштабах больше, чем  $r_c$ , “замерзает” абсолютная величина среднего значения параметра порядка, но не его фаза  $\phi$ . Причина этого заключается в инвариантности энергии системы относительно однородного сдвига  $\phi \rightarrow \phi + \text{const}$ . Поэтому энергия зависит только от градиента

$\phi$ . Главный вклад в эту энергию на масштабах больше, чем  $r_c$ , можно записать в следующем виде

$$\mathcal{F}_{long} = \int d^3r \frac{B}{2} (\nabla\phi)^2, \quad (1.19)$$

где модуль  $B$  является функцией  $T_c - T$ . Отметим, что модуль  $B$  хорошо определен даже далеко от температуры перехода (при низких температурах). Для сверхтекучего  $^4\text{He}$  вместо модуля  $B$  обычно используется величина  $\rho_s = Bm^2/\hbar^2$ , которая называется сверхтекучей плотностью (здесь  $m$  – масса атома  $^4\text{He}$ ) [13]. Тогда (1.19) записывается в виде

$$\mathcal{F}_{long} = \int d^3r \frac{\rho_s}{2} v_s^2,$$

где  $v_s = \hbar\nabla\phi/m$  – сверхтекучая скорость.

Для двухкомпонентного параметра порядка в низкотемпературной фазе имеются свои дефекты, которые называются квантовыми вихрями. Это линейные объекты, на линии вихрей абсолютная величина  $\langle\psi\rangle$  обращается в ноль, и потому фаза  $\phi$  на этой линии не определена. При обходе же вокруг этой линии фаза  $\phi$  может приобретать приращение, кратное  $2\pi$ :

$$\oint d\mathbf{r} \nabla\phi = 2\pi k, \quad (1.20)$$

где  $k$  – целое число. Вокруг прямолинейного вихря  $|\nabla\phi| = k/r$  где  $r$  – расстояние для вихревой линии. Абсолютное значение параметра порядка, которое равно нулю при  $r = 0$ , выходит на свое однородное значение при  $r \sim r_c$ . Таким образом, у вихря имеется ядро размера  $r_c$ . Подставляя  $|\nabla\phi| = k/r$  в (1.19), мы приходим к логарифмическому интегралу, который снизу обрезается на критическом радиусе  $r_c$ , а сверху – на некотором характерном масштабе  $L_*$ , который является размером системы для одиночного вихря или межвихревым расстоянием для системы вихрей. В явном виде энергия вихря записывается в виде

$$\pi B L k^2 \ln \left( \frac{L_*}{r_c} \right), \quad (1.21)$$

где  $L$  – длина вихря. Реально наблюдаются вихри с  $k = \pm 1$ , поскольку, как видно из (1.21), вихрю с  $|k| > 1$  энергетически выгодно развалиться на единичные вихри с  $k = \pm 1$ . То же выражение (1.21) справедливо для энергии произвольного вихря, если его радиус кривизны много больше  $r_c$ . Например, энергия вихревого кольца определяется (1.21) с  $L = L_* = 2\pi R$  ( $R$  – радиус кольца).

Аналогичная схема может быть сформулирована для параметра порядка с числом компонент больше двух. Запишем его среднее в следующем виде

$$\langle \varphi_\mu \rangle = |\langle \varphi \rangle| n_\mu, \quad (1.22)$$

где  $n_\mu$  – единичный вектор (число компонент которого определяется числом компонент параметра порядка). Для ферромагнетика  $n_\mu$  является единичным вектором в направлении намагниченности. На масштабах больше, чем  $r_c$ , функционал Ландау сводится к

$$\mathcal{F}_{long} = \int d^3r \frac{B}{2} (\nabla n_\mu)^2. \quad (1.23)$$

Рассмотрим трехкомпонентный параметр порядка. В этом случае элементарным дефектом является “еж”. Для одиночного ежа  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор с началом в точке расположения ежа. В отличие от доменной стенки и вихря, еж является точечным дефектом. В центре ежа направление  $\mathbf{n}$  не определено, но абсолютная величина  $|\langle \varphi \rangle|$  в этой точке обращается в ноль. Поэтому сам параметр порядка  $\langle \varphi_\mu \rangle$  остается в этой точке хорошо определенным. Абсолютная величина параметра порядка  $|\langle \varphi \rangle|$  выходит на свое однородное значение на расстоянии порядка  $r_c$ , то есть еж (как и вихрь) имеет ядро размера  $r_c$ . Подставляя  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$  в (1.23), мы заключаем, что энергия ежа “сидит” на больших  $r$ , то есть определяется размерами системы. Поэтому одиночные ежи в системе обычно не возникают, а возникают только пары еж-антиеж (для одиночного антиежа  $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r$ ), энергия такой пары линейно зависит от расстояния между ежом и антиежом.

Возвратимся теперь к смыслу среднего значения многокомпонентного параметра порядка в низкотемпературной фазе. Мы можем сказать, что любое среднее по флуктуациям параметра порядка вычисляется, как функциональный интеграл по  $\varphi$  при условии, что вычисляются флуктуации параметра порядка около среднего с данным  $\mathbf{n}$  (или фазой  $\phi$ ). Точнее говоря, надо считать, что поле  $\mathbf{n}$  (или  $\phi$ ) медленно (по сравнению с корреляционной длиной  $r_c$ ) меняется в пространстве. При таком подходе остаются “недоинтегрированными” длинноволновые степени свободы, которые надо учитывать отдельно. Мы можем ввести эффективную энергию этих длинноволновых степеней свободы  $\mathcal{F}_{long}$ , которая определяется соотношением

$$\exp \left( -\frac{\mathcal{F}_{long}}{T} \right) = \int' \mathcal{D}\varphi \exp \left( -\frac{\mathcal{F}}{T} \right), \quad (1.24)$$

где штрих при интеграле означает введенное выше условное интегрирование. В главном приближении  $\mathcal{F}_{long}$  дается (1.19) или (1.23), где вычисление модуля  $B$  представляет собой отдельную задачу. Функция

$\exp(-\mathcal{F}_{long}/T)$  задает распределение вероятностей флуктуаций поля  $\mathbf{n}$  (или  $\phi$ ). Поэтому мы будем называть  $\mathcal{F}_{long}$  тем же термином – функционалом Ландау.

Несложно найти значения модулей  $B$  в выражениях (1.19,1.23) в рамках теории среднего поля, когда флуктуации параметра порядка около его среднего значения слабы. В этом случае интеграл в (1.24) определяется узкой окрестностью минимума функционала Ландау, соответствующего данному значению поля  $\mathbf{n}$  (или  $\phi$ ). Тогда  $\mathcal{F}_{long}$  можно найти, как значение  $\mathcal{F}$  в этом минимуме. Подставляем выражение  $\psi = |\psi|e^{i\phi}$  или  $\varphi_\mu = |\varphi|n_\mu$  в градиентную энергию (1.9) и учитываем, что в пределе  $r \gg r_c$  модуль параметра порядка “замерзает”, то есть может считаться константой. Заменяя эту константу ее среднеполевым значением, мы находим в обоих случаях один и тот же ответ  $B = 6|a|b/\lambda$ . Таким образом, в теории среднего поля  $B$  оказывается пропорциональным  $T_c - T$ .

## Задачи

### Задача 1.1

Ниже точки перехода второго рода, характеризуемого однокомпонентным параметром порядка, возможно образование так называемых доменных стенок. В плоской геометрии  $\langle \varphi \rangle$  зависит только от координаты  $z$  (вдоль оси, перпендикулярной к стенке), причем  $\varphi \rightarrow \pm\varphi_0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ , где  $\varphi_0$  – равновесное значение в однородном случае. Найти  $\langle \varphi(z) \rangle$  в рамках теории среднего поля.

#### Решение задачи 1.1

В теории среднего поля флуктуации  $\varphi$  пренебрежимы, поэтому ниже мы опускаем знак среднего у параметра порядка. В том же приближении  $\varphi_0 = \sqrt{6|a|/\lambda}$ . Функция  $\varphi(z)$  должна соответствовать экстремуму функционала  $\mathcal{F}$ , который определяется, как сумма членов (1.6,1.7,1.9). Варьируя эту сумму по  $\varphi$ , мы получаем уравнение

$$a\varphi + \lambda\varphi^3/6 - b\partial_z^2\varphi = 0. \quad (1.25)$$

Основываясь на аналогии со вторым законом Ньютона, можно найти первый интеграл уравнения (1.25)

$$\frac{b}{2}(\partial_z\varphi)^2 - \frac{a}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{24}\varphi^4 = \text{const},$$

который соответствует энергии на Ньютоновском языке. Величину этого первого интеграла можно найти, если подставить в найденное выра-

жение асимптотическое значение  $\varphi = \varphi_0$ . Тогда мы приходим к уравнению первого порядка

$$\partial_z \varphi = \frac{1}{\sqrt{2} \varphi_0 r_c} (\varphi_0^2 - \varphi^2),$$

где критический радиус  $r_c$  определен соотношением (1.18). Решение этого уравнения первого порядка имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \tanh \left( \frac{z - z_0}{\sqrt{2} r_c} \right),$$

где  $z_0$  – произвольная константа, определяющая положение доменной стенки.

### Задача 1.2

Функционал Ландау для гайзенберговского ферромагнетика на масштабах, много больших  $r_c$ , может быть записан (в обменном приближении) в виде (1.23), где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор вдоль направления намагниченности. Во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  в ферромагнетике имеется дополнительный вклад в энергию

$$\mathcal{F}_H = - \int d^3r M \mathbf{H} \mathbf{n},$$

где  $M$  – абсолютное значение намагниченности. Найти флуктуационный вклад в продольную магнитную восприимчивость ферромагнетика.

### Решение задачи 1.2

Пусть вектор  $\mathbf{H}$  направлен вдоль оси  $Z$ . Тогда средняя намагниченность  $\langle \mathbf{M} \rangle$  направлена вдоль той же оси. Таким образом, мы должны найти  $M_z = M \langle n_z \rangle$ . На больших масштабах флуктуации  $n_x$  и  $n_y$  слабы, и мы можем использовать разложение  $n_z \approx 1 - n_x^2/2 - n_y^2/2$ . Поэтому продольная магнитная восприимчивость  $\chi_{\parallel}$  может быть записана, как

$$\chi_{\parallel} \equiv \frac{\partial \langle M_z \rangle}{\partial H} \approx -M \frac{\partial}{\partial H} \langle n_x^2 \rangle. \quad (1.26)$$

Используя то же разложение  $n_z \approx 1 - n_x^2/2 - n_y^2/2$ , мы получаем в квадратичном приближении

$$\mathcal{F}_{long} + \mathcal{F}_H \rightarrow \frac{1}{2} \int d^3r [B(\nabla n_x)^2 + B(\nabla n_y)^2 + M H n_x^2 + M H n_y^2].$$

Далее мы находим из функции распределения вероятности  $\exp(-\mathcal{F}_{long}/T - \mathcal{F}_H/T)$  (смотри Приложение А.1):

$$\langle n_x(\mathbf{r}) n_x(\mathbf{0}) \rangle = \langle n_y(\mathbf{r}) n_y(\mathbf{0}) \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \frac{T}{Bq^2 + MH}.$$

Затем, используя выражение (1.26), мы получаем:

$$\chi_{\parallel} = M^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{T}{(Bq^2 + MH)^2} = \frac{TM^{3/2}}{8\pi B^{3/2} H^{1/2}}. \quad (1.27)$$

Обратим внимание на расходимость этого выражения при малых  $H$ . Из выражения (1.27) следует, что характерное значение волнового вектора равно  $q \sim \sqrt{MH/B}$ . Чтобы наши вычисления были законными, этот волновой вектор должен быть меньше, чем обратный критический радиус. Отсюда получается неравенство  $H \ll B/(Mr_c^2)$ .

## Лекция 2

# Теория возмущений

Мы начинаем изучение роли флуктуаций параметра порядка в окрестности фазового перехода второго рода или вблизи критической точки. Здесь мы изучаем одновременные корреляции, которые определяются многочечными средними  $\langle \varphi(t, \mathbf{r}_1) \varphi(t, \mathbf{r}_2) \dots \rangle$ . Если система находится в тепловом равновесии, то теоретически эти корреляционные функции должны вычисляться при помощи функции распределения вероятности (1.3). Поскольку она не зависит от времени, не зависят от времени и одновременные корреляционные функции параметра порядка. Мы также пренебрегаем граничными эффектами, вследствие чего все пространственные точки можно считать эквивалентными, это свойство называется пространственной однородностью. Вследствие пространственной однородности корреляционные функции  $\langle \varphi(t, \mathbf{r}_1) \varphi(t, \mathbf{r}_2) \dots \rangle$  зависят только от разностей координат, а среднее значение параметра порядка  $\langle \varphi \rangle$  не зависит от координат. Во избежание недоразумений отметим, что пространственная однородность подразумевает также отсутствие в системе дефектов типа доменных стенок, вихрей или ечей, которые обсуждались в лекции 1.

Мы используем специальное обозначение для неприводимой парной корреляционной функции параметра порядка:

$$G(\mathbf{r}) = \langle\langle \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_1) \rangle\rangle = \langle \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_1) \rangle - \langle \varphi \rangle^2. \quad (2.1)$$

Она является частным случаем кумулянта (кумулянтом двух флуктуирующих величин  $A$  и  $B$  называется комбинация  $\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ ). В силу пространственной однородности парная корреляционная функция зависит только от разности своих аргументов. При  $r \rightarrow \infty$  разрушается корреляция между  $\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1)$  и  $\varphi(\mathbf{r}_1)$ , так что среднее  $\langle \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_1) \rangle$  распадается на произведение средних. Поэтому вычитание квадрата



среднего в (2.1) ведет к тому, что  $G(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Это позволяет ввести хорошо определенное Фурье-преобразование парной корреляционной функции, которое мы будем обозначать той же буквой  $G$ :

$$G(\mathbf{q}) = \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r})G(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Обратное же преобразование гласит

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})G(\mathbf{q}). \quad (2.3)$$

Мы будем называть  $G$  также функцией Грина.

## 2.1 Разложение по константе взаимодействия

Парную корреляционную функцию параметра порядка можно записать в виде функционального интеграла

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_2) \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(\frac{F - \mathcal{F}}{T}\right) \varphi(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_2). \quad (2.4)$$

Здесь  $\int \mathcal{D}\varphi$  обозначает интегрирование по всем степеням свободы параметра порядка. Его можно понимать, как многократный интеграл по коэффициентам разложения  $\varphi(\mathbf{r})$  в ряд Фурье (1.1). Поскольку параметр порядка определен на масштабах больших, чем атомный размер, то имеется ограничение на волновые вектора в ряде (1.1). Мы будем считать, что  $|\mathbf{q}| < \Lambda$ , где  $\Lambda$  – волновой вектор, несколько меньший, чем обратный атомный размер. Этот волновой вектор  $\Lambda$  называют обычно обрезкой или ультрафиолетовой обрезкой (последний термин позаимствован из квантовой электродинамики [16, 17, 18]).

Главные вклады в функционал Ландау  $\mathcal{F}$  были определены в лекции 1. Этот функционал можно записать, как сумму  $\mathcal{F}_{reg} + \mathcal{F}_{(2)} + \mathcal{F}_{int}$ , где

$$\mathcal{F}_{(2)} = \int d^3r \left[ \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{b}{2} (\nabla \varphi)^2 \right], \quad (2.5)$$

$$\mathcal{F}_{int} = \int d^3r \frac{\lambda}{24} \varphi^4. \quad (2.6)$$

Если теперь разложить  $\exp(-\mathcal{F}_{(2)}/T - \mathcal{F}_{int}/T)$  в (2.4) по  $\mathcal{F}_{int}$ , то мы получим парную корреляционную функцию  $G(r)$  в виде ряда по константе взаимодействия  $\lambda$ . Этот ряд называется рядом теории возмущений, он является асимптотическим. Обычно в ряд теории возмущений

включают также члены, которые происходят из разложения свободной энергии  $F$  по  $\lambda$ , которое можно найти из соотношения (1.5). Ясно, что ряд теории возмущений можно ввести для любой корреляционной функции параметра порядка.

Изучим прежде всего выражения для корреляционных функций параметра порядка, которые получаются в пренебрежение  $\mathcal{F}_{int}$  (то есть при  $\lambda = 0$ ), эти корреляционные функции называются обычно затравочными. Выражения для затравочных корреляционных функций могут быть найдены из интегралов типа (2.4), где вес заменен на  $\exp[(F_0 - \mathcal{F}_{(2)})/T]$ . Здесь в соответствии с (1.5):

$$\exp\left(-\frac{F_0}{T}\right) = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{\mathcal{F}_{(2)}}{T}\right] \equiv \prod_q \int d\varphi_q \exp\left[-\frac{\mathcal{F}_{(2)}}{T}\right]. \quad (2.7)$$

Выражение же для затравочной парной корреляционной функции записывается в виде

$$G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \rangle_0 \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[\frac{F_0 - \mathcal{F}_{(2)}}{T}\right] \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2). \quad (2.8)$$

Заметим, что  $\mathcal{F}_{(2)}$  является суммой членов второго порядка по  $\varphi_q$ , то есть функциональный интеграл в (2.8) как и в (2.7), сводится к произведению единичных Гауссовых интегралов, каждый из которых легко может быть вычислен явно. В результате мы находим следующее выражение в Фурье-представлении (подробности можно найти в приложении A.1)

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{T}{a + bq^2}. \quad (2.9)$$

Делая Фурье-преобразование (2.3), мы находим в  $\mathbf{r}$ -представлении

$$G_0(\mathbf{r}) = \frac{T}{4\pi br} \exp\left(-\sqrt{\frac{a}{b}} r\right). \quad (2.10)$$

Приведенные выражения имеют смысл только для  $a > 0$ . Модификация схемы теории возмущений для  $a < 0$  обсуждается ниже.

Правила для вычисления сингулярного вклада в свободную энергию  $F_{sing} = F - F_{reg}$  (связанного с флуктуациями параметра порядка) могут быть сформулированы, исходя из формально точного соотношения

$$\exp\left(-\frac{F_{sing}}{T}\right) = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{\mathcal{F}_{(2)} + \mathcal{F}_{int}}{T}\right), \quad (2.11)$$

приводящего к

$$\exp\left(-\frac{F_0 - F_{sing}}{T}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle (\mathcal{F}_{int}/T)^n \rangle_0,$$

где  $\langle \dots \rangle_0$  обозначают средние, определяемые интегралами типа выписанных в (2.8). Парная корреляционная функция (2.4) может быть записана в следующем виде

$$G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle (\mathcal{F}_{int}/T)^n \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \rangle_0. \quad (2.12)$$

Ясно, что корреляционная функция любого порядка может быть представлена в виде, аналогичном (2.12).

В рядах теории возмущений для свободной энергии и корреляционных функций возникают интегралы вида

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \dots \varphi(\mathbf{r}_n) \rangle_0 \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( \frac{F_0 - \mathcal{F}_{(2)}}{T} \right) \varphi(\mathbf{r}_1) \dots \varphi(\mathbf{r}_n).$$

Так как  $\mathcal{F}_{(2)}$  является выражением второго порядка по  $\varphi$ , то все такие интегралы являются Гауссовыми и могут быть вычислены явно. Для них справедлива так называемая теорема Вика (смотри Приложение А.1). А именно,  $\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \dots \varphi(\mathbf{r}_n) \rangle_0$  равно сумме произведений затравочных функций  $G_0$ , представляющих средние  $\langle \varphi \varphi \rangle_0$  для всех возможных способов спаривания. Выпишем в качестве примера затравочную корреляционную функцию четвертого порядка

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_4) \rangle_0 = G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) + \\ G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) + G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3).$$

Аналогично могут быть выписаны и средние для корреляционных функций более высокого порядка.

Члены ряда теории возмущений типа (2.12) для корреляционной функции

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \dots \varphi(\mathbf{r}_n) \rangle$$

могут быть представлены Фейнмановскими диаграммами [11, 16, 17, 18], на которых изображены линии, соединяющие по определенным правилам точки. Часть точек соответствует аргументам корреляционной функции  $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n$ , а часть точек (вершины) представляет собой аргументы параметра порядка в разложении по  $\mathcal{F}_{int}$ , по их координатам  $\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m$  производится интегрирование. Кроме того, каждой вершине  $\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m$  сопоставляется множитель  $-\lambda/T$ . К каждой точке  $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n$  прикреплен одна линия, а в точках  $\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_m$  сходится по четыре линии. (Точнее говоря, к вершине прикрепляется четыре конца линий.) Каждой линии сопоставляется затравочная парная функция  $G_0$ , зависящая от соответствующей разности координат. Таким образом, любая диаграмма содержит  $n$  “внешних” точек и  $m$  “внутренних”



Рис. 2.1: Две первые диаграммы, представляющие флуктуационный вклад в  $G$ .



Рис. 2.2: Диаграммное уравнение для  $G$ .

точек (вершин), последнее число определяет порядок разложения теории возмущений.

Ряд теории возмущений для функции  $G$  определяется выражением (2.12). Рассмотрим вклад в  $G$  первого порядка по  $\lambda$ . Он содержит два слагаемых, одно из которых дается разложением экспоненты в (2.12) по  $\mathcal{F}_{int}$ :

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1)(-\mathcal{F}_{int}/T)\varphi(\mathbf{r}_2) \rangle_0. \quad (2.13)$$

На диаграммном языке член (2.13) может быть представлен в виде суммы двух диаграмм, приведенных на рисунке 2.1. Здесь первая диаграмма является неприводимой (то есть не распадается на отдельные блоки), а вторая диаграмма является приводимой (то есть распадается на отдельные блоки). Приводимая диаграмма дает произведение  $G_0$  и  $\langle (-\mathcal{F}_{int}/T) \rangle_0$ . Этот вклад в  $G$  сокращается слагаемым, которое происходит из разложения  $\exp[(F_{sing} - F_0)/T]$  в (2.12) в ряд по  $\lambda$ . Таким образом только первая (неприводимая) диаграмма дает вклад в  $G$ . Это наблюдение обобщается и на вклады более высокого порядка по  $\lambda$ : только неприводимые диаграммы дают вклад в  $G$ , а приводимые диаграммы, происходящие из разложения  $\exp(-\mathcal{F}_{int}/T)$ , сокращаются за счет разложения  $\exp[(F_{sing} - F_0)/T]$ .

Разность  $G - G_0$  представляется суммой неприводимых диаграмм, каждая из которых имеет две “внешние”  $G_0$ -линии и некоторый блок между ними. Выделим блоки, которые нельзя разрезать по единичной  $G_0$ -линии. Такие блоки называют одночастично неприводимыми (или, на языке квантовой теории поля, собственно-энергетическими). Введем сумму одночастично неприводимых блоков, которую мы будем обозначать  $\Sigma$  и представлять прямоугольником на диаграммах. Тогда можно сформулировать следующее диаграммное уравнение, приведенное на рисунке 2.2. Здесь толстая линия обозначает  $G$  (а тонкие линии, как и выше, обозначают  $G_0$ ). В аналитической форме это уравнение

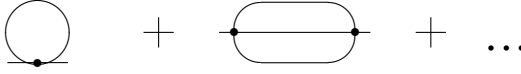


Рис. 2.3: Сумма одночастично неприводимых блоков.

имеет вид

$$G(\mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r}) + \int d^3r_1 d^3r_2 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Sigma(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2). \quad (2.14)$$

Переходя в Фурье-представление и принимая во внимание (2.9), мы получаем

$$G(\mathbf{q}) = \frac{T}{a + bq^2 - T\Sigma(\mathbf{q})}. \quad (2.15)$$

Из выражения (2.15) следует, что  $G(\mathbf{q} = 0)$  обращается в бесконечность, если

$$a - T\Sigma(0) = 0. \quad (2.16)$$

Именно это соотношение и определяет истинную температуру фазового перехода. В дальнейшем мы будем считать, что вклад  $\Sigma(0)$  уже включен в переопределение температуры перехода  $T_c$ , то есть произведено преобразование  $a \rightarrow a - T\Sigma(T_c, q = 0)$ , так что  $a \propto T - T_c$  для истинной температуры перехода. Тогда вместо  $\Sigma$  в выражении для  $G(\mathbf{q})$  будет фигурировать разность

$$\Sigma(\mathbf{q}) - \Sigma(T_c, q = 0), \quad (2.17)$$

которая только и имеет физический смысл. Само же значение температуры перехода  $T_c$  не может быть вычислено в рамках используемого нами феноменологического подхода.

Диаграммное представление для  $\Sigma$  дано на рисунке 2.3. Приведем явное выражение для вклада в  $\Sigma$ , соответствующее первой диаграмме, представленной на этом рисунке:

$$\Sigma^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda}{2T} G_0(\mathbf{r} = 0) \delta(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

В Фурье-представлении (2.18) переписывается в виде

$$\Sigma^{(1)}(\mathbf{k}) = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{a + bq^2}. \quad (2.19)$$

Реально  $\Sigma^{(1)}(\mathbf{k})$  не зависит от волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Интеграл по  $q$  в (2.19) формально расходится при больших  $q$ , то есть величина этого

интеграла набирается вблизи  $q \sim \Lambda$  (напомним, что  $\Lambda$  – обрезка, то есть максимальный волновой вектор поля  $\varphi$ ). Так как главный вклад в  $\Sigma^{(1)}$  определяется большими волновыми векторами  $q \sim \Lambda$ , его значение не может быть найдено в рамках нашей длинноволновой теории. К счастью, это и не требуется, так как упомянутый вклад должен быть включен в переопределение температуры перехода  $T_c$ , как мы объяснили выше. Что же касается разности (2.17) для  $\Sigma^{(1)}$ , то она сидит на малых волновых векторах (из-за малости  $a$ ) и может быть вычислена явно

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(a) - \Sigma^{(1)}(T_c, q = 0) \\ = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{a + bq^2} - \frac{1}{bq^2} \right) = \frac{\lambda a^{1/2}}{4\pi b^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Как и следует, это выражение обращается в ноль в точке перехода, то есть при  $a = 0$ .

Выражение (2.20) следует сравнить с затравочной величиной  $a$ . Поправка (2.20) пренебрежима по сравнению с  $a$ , если  $|\tau| \gg \text{Gi}$  [19], где  $\tau = (T - T_c)/T_c$  – безразмерный параметр, характеризующий близость к точке фазового перехода, а  $\text{Gi}$  – так называемое число Гинзбурга

$$\text{Gi} = \frac{T_c \lambda^2}{\alpha b^3}. \quad (2.21)$$

Неравенство  $|\tau| \gg \text{Gi}$  называют обычно критерием Гинзбурга. Таким образом, мы установили критерий применимости теории среднего поля, которая работает вне области сильных флуктуаций. Заметим, что область применимости теории среднего поля существует, только если  $\text{Gi} \ll 1$ , так как само разложение Ландау работает только при условии  $|\tau| \ll 1$ . В противном случае, то есть при  $\text{Gi} \gtrsim 1$ , область применимости теории среднего поля вообще отсутствует. Такая ситуация реализуется, например, для перехода жидкого  $^4\text{He}$  в сверхтекучее состояние (для этого перехода  $\text{Gi} \sim 1$ ).

Рассмотрим теперь вклад, соответствующий второй диаграмме на рисунке 2.3:

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda^2}{6T^2} G_0^3(\mathbf{r}). \quad (2.22)$$

Подставляя сюда выражение (2.10) и производя Фурье-преобразование, мы сталкиваемся с логарифмической расходимостью на малых  $\mathbf{r}$ . Эта расходимость должна быть “обрезана” на  $r \sim \Lambda^{-1}$ . После этого мы находим выражение

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{q}) \approx \frac{\lambda^2 T}{6(4\pi)^2 b^3} \ln(\Lambda/q), \quad (2.23)$$

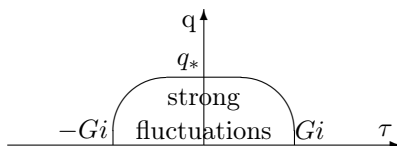


Рис. 2.4: Область, где существенны флуктуации.

справедливое при условии  $q\sqrt{b/|a|} \gg 1$ . При обратном неравенстве волновой вектор  $q$  в (2.23) следует заменить на  $\sqrt{|a|/b}$ . Выражение (2.23) пренебрежимо по сравнению с затравочным значением  $bq^2$  в (2.15), если  $q \gg q_*$ , где

$$q_* = T\lambda/b^2. \quad (2.24)$$

При получении этой оценки мы опустили логарифмический множитель, который может в лучшем случае дать фактор в несколько единиц.

Мы заключаем, что флуктуационный вклад  $\Sigma$  в парную корреляционную функцию является существенным, если  $q \lesssim q_*$  и  $|\tau| \lesssim Gi$ . Эти два условия определяют область вблизи начала координат на плоскости  $\tau - q$ , приведенную на рисунке 2.4, где флуктуации существенно меняют поведение корреляционных функций параметра порядка по сравнению со среднеполевым. Заметим, что при использовании приведенных выше критериев для конкретных веществ надо учитывать численные множители, возникающие во флуктуационных вкладах (2.20, 2.23), поскольку эти множители дают факторы  $10^{-2} \div 10^{-3}$ .

## 2.2 Теория возмущений ниже точки перехода

Строго говоря, все сказанное выше относилось к случаю  $a > 0$ , так как в противном случае, при  $a < 0$ , парная корреляционная функция (2.9) перестает быть положительно определенной величиной, хотя она должна быть положительной в силу своего определения. Это несоответствие свидетельствует о том, что система неустойчива по отношению к спонтанному образованию ненулевого значения параметра порядка  $\langle \varphi \rangle$ . Обсуждение смысла этой величины (связанного с конечностью времени наблюдения) приведено в лекции 1. При наличии среднего значения  $\langle \varphi \rangle$  следует отдельно выделять вклады в корреляционные функции  $\varphi$ , связанные с этим средним. Удобно иметь дело с корреляционными функциями разности  $\varphi - \langle \varphi \rangle$ . В частности, неприво-

дмая корреляционная функция (2.1) записывается в следующем виде

$$G(\mathbf{r}) = \langle [\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) - \langle \varphi \rangle][\varphi(\mathbf{r}_1) - \langle \varphi \rangle] \rangle .$$

При наличии среднего значения  $\langle \varphi \rangle$  (возникающего при  $a < 0$ ) правила теории возмущений должны быть несколько модифицированы. Прежде всего, функционал Ландау  $\mathcal{F}$  должен теперь раскладываться вблизи  $\langle \varphi \rangle$ , по отклонениям  $\varphi - \langle \varphi \rangle$ . При этом, помимо членов четвертого порядка, в этом разложении возникает также член третьего порядка, пропорциональный  $\lambda \langle \varphi \rangle$ . Затравочно в качестве среднего  $\langle \varphi \rangle$  следует взять значение, возникающее в рамках среднего поля (смотри лекцию 1). Удерживая в функционале Ландау член второго порядка разложения по разности  $\varphi - \langle \varphi \rangle$ , мы находим Гауссову функцию распределения вероятности, которая ведет к следующему затравочному выражению для неприводимой парной корреляционной функции (2.1)

$$G_0(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{T}{2|a| + bq^2} = \frac{T}{4\pi br} \exp\left(-\sqrt{\frac{2|a|}{b}} r\right), \quad (2.25)$$

справедливое для однокомпонентного параметра порядка. Мы видим, что единственная разница по сравнению с выражениями (2.9, 2.10) заключается в том, что  $a$  заменяется на  $2|a|$ .

Несколько сложнее обстоит дело с многокомпонентным параметром порядка. В этом случае парная корреляционная функция (2.1) имеет вид:

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \langle \varphi_\mu(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \varphi_\nu(\mathbf{r}_1) \rangle - \langle \varphi_\mu \rangle \langle \varphi_\nu \rangle . \quad (2.26)$$

При  $a > 0$  для затравочной парной корреляционной функции мы имеем прямое обобщение (2.9, 2.10):

$$G_{0\mu\nu}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{T\delta_{\mu\nu}}{a + bq^2} = \frac{T\delta_{\mu\nu}}{4\pi br} \exp\left(-\sqrt{\frac{a}{b}} r\right). \quad (2.27)$$

Однако при  $a < 0$  возникает выделенное направление в “изотопическом” пространстве (пространстве компонент параметра порядка), связанное со средним значением параметра порядка. Будем считать, что отлична от нуля только первая компонента параметра порядка  $\langle \varphi_1 \rangle \neq 0$ . Тогда мы находим

$$G_{011}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{T e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{2|a| + bq^2} = \frac{T}{4\pi br} \exp\left(-\sqrt{\frac{2|a|}{b}} r\right), \quad (2.28)$$

$$G_{0\mu\nu}(\mathbf{r}) = \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{T}{bq^2} = \frac{T}{4\pi br} \delta_{\mu\nu}, \quad (2.29)$$



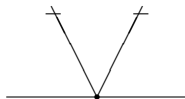


Рис. 2.5: Первая поправка к парной корреляционной функции  $\varphi$  по полю  $h$ .

в последнем выражении  $\mu, \nu \neq 1$ . Обратим внимание на отсутствие экспоненциального затухания в последнем выражении. Этот факт связан с обсуждавшейся в лекции 1 “мягкостью” степеней свободы параметра, связанных с его вращением в “изотопическом” пространстве, которая проявляется в длинноволновом пределе.

Как корреляционные функции параметра порядка, так и его среднее значение  $\langle \varphi \rangle$  сильно ренормируются (изменяются по сравнению со среднеполевыми значениями) в области сильных флуктуаций, представленной на рисунке 2.4. Принципиально среднее значение  $\langle \varphi \rangle$  должно определяться следующим образом. Необходимо задаться некоторым значением  $\langle \varphi \rangle$ , вычислить свободную энергию системы  $F$  при этом  $\langle \varphi \rangle$ , а затем найти минимум  $F$ , который и соответствует значению  $\langle \varphi \rangle$ , который реализуется в системе.

Теперь мы приступаем к рассмотрению теории возмущений при наличии линейного по параметру порядка члена в разложении Ландау, тогда главные члены разложения имеют вид (1.13). Напомним, что такого типа функционал Ландау относится к окрестности критической точки пар-жидкость или к ферромагнетику во внешнем магнитном поле. Поправки к корреляционным функциям, связанные с коэффициентом  $h$  в выражении (1.13), могут быть учтены по теории возмущений, в результате разложения  $\exp(-\mathcal{F}/T)$  в ряд по  $h$ . В результате на диаграммах появляется новый объект —  $h$ , который мы будем обозначать крестиком. Первая поправка к парной корреляционной функции соответствует диаграмме, представленной на рисунке 2.5.

На рисунке 2.5 имеется объект, который является линией с крестом на конце. Ему соответствует аналитическое выражение

$$\int d^3 r_1 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) h,$$

которое, как мы уже установили в лекции 1, является средним значением параметра порядка, которое возникает, как отклик на внешнее поле. Это выражение получено в первом порядке по  $h$  и в нулевом порядке по константе взаимодействия  $\lambda$ . Далее можно принимать во

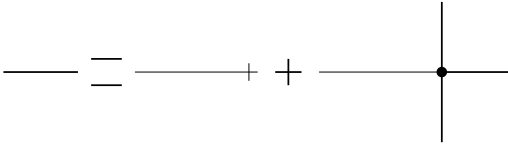


Рис. 2.6: Диаграммное уравнение для среднего значения параметра порядка в “древесном приближении”.

внимание как более высокие порядки по полю  $h$ , так и более высокие порядки по  $\lambda$ . Они суммируются в полное значение  $\langle \varphi \rangle$ . Таким образом, мы приходим к теории возмущений, где помимо линий, которым соответствуют функции  $G$  и вершин, которым соответствуют  $\lambda$ , возникают также и линии, которым соответствует среднее значение параметра порядка. Такие линии одним концом прикрепляются к вершинам, а другой конец (с крестом) соответствует полю  $h$ .

В таком виде диаграммная техника работает при  $a > 0$ . Как мы уже упоминали, при  $a < 0$  имеются проблемы, связанные с отрицательностью затравочной Гриновской функции  $G(q)$  при малых  $q$ . Чтобы решить эту проблему, требуется произвести перенормировку  $G(q)$ , которая сводится к суммированию лестничного ряда диаграмм типа приведенных на рисунке 2.5. Отметим, что при  $a < 0$  такая процедура дает ненулевую ренормировку  $G$  даже в пределе  $h \rightarrow 0$ . Тогда среднее значение  $\varphi$  следует интерпретировать, как самостоятельный объект, независимый от  $h$ . Его затравочное значение определяется диаграммным соотношением, приведенным на рисунке (2.6), которое совпадает с уравнением на среднее значение параметра порядка (1.17), которое получается в теории среднего поля. Обычно о диаграммах типа приведенного на рисунке (2.6), где отсутствуют петли, говорят, как о древесных диаграммах. В результате суммирования упомянутой лестницы мы находим выражение (2.25) или (2.29). При этом можно работать и при  $a < 0$ , и с ненулевым  $h$ . Отметим, что при  $a < 0$  значения  $\langle \varphi \rangle$ , возникающие в пределах  $h \rightarrow +0$  и  $h \rightarrow -0$ , равны по абсолютной величине, но отличаются знаками.

## 2.3 Скейлинг

Для того, чтобы исследовать поведение парной корреляционной функции (а также всех других корреляционных функций) в области сильных флуктуаций (приведенной на рисунке 2.4) необходимо просуммировать вклады в  $G(q)$  всех порядков по  $\lambda$ . Это исключительно сложная задача, которая далека от своего решения. Мы знаем только главные

особенности поведения корреляционных функций  $\varphi$  в области сильных флуктуаций, эта информация происходит в основном из экспериментальных данных и до некоторой степени объясняется теоретически в рамках так называемого  $\epsilon$ -разложения, которое обсуждается в следующих лекциях.

Как мы объяснили, окрестность начала координат на плоскости  $\tau - q$  является областью сильных флуктуаций, где можно ожидать сингулярного поведения корреляционных функций параметра порядка. Реально наблюдается некоторое скейлинговое поведение [14, 15]. Например, среднее значение параметра порядка  $\langle \varphi \rangle$  (возникающее ниже точки фазового перехода) степенным образом зависит от близости к точке перехода:

$$|\langle \varphi \rangle| \propto |\tau|^\beta, \quad (2.30)$$

где  $\beta$  – некоторое число. Такого сорта показатели называют критическими индексами. Их значения зависят от числа компонент параметра порядка.

Скейлинг означает, что любая корреляционная функция параметра порядка (в Фурье-представлении) является произведением некоторого размерного фактора, степени  $\tau$  и функции безразмерных комбинаций  $q_i r_c$ . Здесь  $q_i$  – волновые вектора, а  $r_c$  – критический радиус, который ведет себя, как некоторая степень  $\tau$ :

$$r_c \propto |\tau|^{-\nu}. \quad (2.31)$$

Здесь  $\nu$  – еще один критический индекс. Например, парная корреляционная функция (2.2) может быть записана в следующем виде:

$$G(q) = |\tau|^{-\gamma} g(qr_c), \quad (2.32)$$

где  $\gamma$  – дополнительный критический индекс. Еще один критический индекс характеризует поведение следующей корреляционной функции

$$\int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \langle\langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle\rangle = |\tau|^{-\alpha} g_1(qr_c), \quad (2.33)$$

где двойные угловые скобки означают кумулянт:

$$\langle\langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle\rangle = \langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle - \langle \varphi^2 \rangle^2.$$

Естественно ожидать, что в пределе  $qr_c \ll 1$  корреляционная функция  $G(q)$  не зависит от  $q$ , а в пределе  $qr_c \gg 1$  она не зависит от  $\tau$ . По крайней мере это так для затравочного выражения (2.9), и нет никаких оснований ожидать, что это свойство будет разрушено за счет взаимодействия флуктуаций. При условии  $qr_c \gg 1$  парная корреляционная функция параметра порядка ведет себя как некоторая степень

волнового вектора:  $G(q) \propto q^{\eta-2}$ . Здесь  $\eta$  – новый критический индекс, который называют обычно индексом аномальной размерности парной корреляционной функции. Название объясняется сравнением поведения  $G(q) \propto q^{\eta-2}$  с затравочным выражением (2.9), дающим  $G(q) \propto q^{-2}$  на больших  $q$ . Таким образом, для больших значений аргумента функции  $g$  в (2.32) имеет место степенное поведение  $g(x) \propto x^{\eta-2}$ . Подставляя эту асимптотику в (2.32) и требуя независимости  $G(q)$  от  $\tau$ , мы находим соотношение

$$\gamma = (2 - \eta)\nu,$$

которое связывает введенные нами критические индексы.

Продemonстрируем, каким образом можно выразить скейлинговое поведение ряда наблюдаемых величин с введенными нами критическими индексами, характеризующими корреляционные функции параметра порядка. Из соотношений (2.5, 2.11) можно найти, дважды дифференцируя по температуре

$$C_{sing} \simeq \frac{V}{4} \left( \frac{\partial a}{\partial T} \right)^2 \int d^3 r \langle\langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle\rangle, \quad (2.34)$$

где  $V$  – объем системы. Мы удержали в (2.34) главный (наиболее сингулярный) вклад в теплоемкость, связанный с зависимостью  $a$  от температуры. Сравнивая (2.33) и (2.34), мы находим, что в области развитых флуктуаций сингулярный вклад в теплоемкость ведет себя, как

$$C_{sing} \propto |\tau|^{-\alpha}. \quad (2.35)$$

Это означает, что сингулярный вклад в свободную энергию определяется соотношением  $F_{sing} \propto |\tau|^{2-\alpha}$ . Предположим, что на систему наложено слабое “внешнее поле”  $h$ , с которым связан дополнительный член

$$\mathcal{F}_h = - \int d^3 r h \varphi \quad (2.36)$$

в функционале Ландау  $\mathcal{F}$ . Среднее  $\langle \varphi \rangle$ , индуцированное при  $T > T_c$  ( $a > 0$ ) “внешним полем”  $h$ , определяется в соответствии с соотношением типа (2.4). Раскладывая экспоненциальный фактор по  $\mathcal{F}_h$ , мы находим, что в линейном приближении

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \rangle_h = T^{-1} \int d^3 r_2 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) h(\mathbf{r}_2). \quad (2.37)$$

Сравнивая это соотношение с (2.32), мы заключаем, что для однородного поля

$$\langle \varphi \rangle_h = \chi h, \quad \chi \propto |\tau|^{-\gamma}. \quad (2.38)$$

Таким образом, в соответствии с (2.35, 2.38) критические индексы  $\alpha$  и  $\gamma$  могут быть непосредственно извлечены из эксперимента.

Имеется ряд соотношений между критическими индексами [14]. Чтобы вывести эти соотношения, можно использовать простую модель, согласно которой в области сильных флуктуаций пространство разбивается на ячейки размером  $r_c$ , флуктуации внутри которых происходят независимо друг от друга, и обладают характерной энергией  $T$ . Тогда для сингулярного вклада в свободную энергию мы получаем оценку  $F_{sing} \sim TV/r_c^3$ . Подставляя сюда законы пропорциональности  $|\tau|$  для  $r_c$  и  $F_{sing}$ , мы находим  $\alpha = 2 - 3\nu$ . Далее, ниже точки перехода флуктуационную энергию единицы объема можно оценить, как  $\chi^{-1}\langle\varphi\rangle^2$ . Приравнявая эту величину к  $F_{sing}$  и подставляя сюда законы пропорциональности  $|\tau|$  для всех величин, мы находим  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ . Таким образом, введенные нами четыре критических индекса могут быть сведены к двум. Эта ситуация является общей: только два критических индекса являются независимыми, а остальные могут быть к ним сведены.

Та же модель позволяет найти оценку для “модуля упругости”  $B$ , характеризующего мягкие степени свободы параметра порядка (с числом компонент  $n > 1$ ) в низкотемпературной фазе, и введенного выражениями (1.19, 1.23). Используя эти выражения, мы можем заключить, что энергия флуктуаций  $\phi$  или  $\mathbf{n}$  на масштабе  $r_c$  равна  $Br_c$ . Та же энергия может быть оценена как температура  $T$  (в области сильных флуктуаций). Отсюда мы заключаем  $B \sim T/r_c$  и, следовательно,

$$B \propto |\tau|^\nu.$$

Тот же закон справедлив и для сверхтекучей плотности  $\rho_s$  [20].

## Задачи

### Задача 2.1

Найти флуктуационную поправку к теплоемкости выше точки перехода в области применимости теории среднего поля.

#### Решение задачи 2.1

Мы исходим из соотношения (2.34). В этом выражении выше точки перехода в области применимости теории среднего поля  $\langle\langle\varphi^2(\mathbf{r})\varphi^2(0)\rangle\rangle$  можно заменить на  $2G_0^2(r)$ . Подставляя сюда выражение (2.10), мы находим

$$C_{sing} \simeq \frac{V\alpha^2 T^2}{32\pi^2} \int \frac{d^3 r}{r^2} \exp\left(-2\sqrt{\frac{a}{b}} r\right) = \frac{V\alpha^2 T_c^2}{16\pi b^{3/2} a^{1/2}},$$

где  $T$  мы заменили на  $T_c$ , и надо подставить  $a = \alpha(T - T_c)$ . Мы видим, что это выражение расходится при  $a \rightarrow 0$ , то есть при  $T \rightarrow T_c$ . Сравнивая найденный вклад со скачком теплоемкости (1.16) (найденном в теории среднего поля), мы находим, что эти величины совпадают по порядку величины при  $\tau \sim Gi$ , где, как и раньше,  $\tau = (T - T_c)/T_c$ . Таким образом, мы снова воспроизвели критерий Гинзбурга.

### Задача 2.2

Рассмотрим окрестность критической точки, которая описывается функционалом Ландау (1.13)

$$\mathcal{F}_{add} = \int d^3r \left[ -h\varphi + \frac{a}{2}\varphi^2 + \frac{b}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{\lambda}{24}\varphi^4 \right].$$

При “больших”  $h$  (когда член с  $a$  является пренебрежимо малым) в области сильных флуктуаций имеет место скейлинговый закон  $\langle\varphi\rangle \propto h^{1/\delta}$ . Выразить критический индекс  $\delta$  через другие критические индексы. Найти критический индекс поля  $h_*(\tau)$ , которое разделяет области сильного и слабого полей.

### Решение задачи 2.2

Сравнивая между собой законы  $\langle\varphi\rangle \propto h^{1/\delta}$  и (2.30), мы получаем  $h_* \propto |\tau|^{\beta\delta}$ . С другой стороны, граничное поле  $h_*(\tau)$  можно оценить, если приравнять  $h_*\langle\varphi\rangle$  (где  $\langle\varphi\rangle$  – среднее значение параметра порядка в низкотемпературной фазе при  $h = 0$ ) к плотности флуктуационной энергии при  $h = 0$ , которая ведет себя, как мы уже установили,  $\propto |\tau|^{2-\alpha}$ . В результате мы находим соотношение

$$\beta\delta = 2 - \alpha - \beta,$$

которое позволяет выразить индекс  $\delta$  через индексы  $\alpha$  и  $\beta$ .

## Лекция 3

# Паркетные диаграммы

Мы установили, что поведение корреляционных функций параметра порядка  $\varphi$  вблизи температуры перехода  $T_c$  в размерности  $d = 3$  является весьма сложным. В то же время проблема исследования корреляционных функций параметра порядка  $\varphi$  может быть последовательно решена в пространстве размерности  $d = 4$  [18]. Основная идея, используемая в современной теории фазовых переходов, заключается в том, что размерность  $d = 3$  не слишком далека от размерности  $d = 4$ . Тогда имеет смысл исследовать проблему в пространстве размерности  $d = 4 - \epsilon$  (где  $\epsilon$  – произвольный малый параметр), и экстраполировать полученные результаты на случай  $\epsilon = 1$  [25]. Такая процедура, дающая критические индексы (введенные в лекции 2) в виде (асимптотического) ряда по  $\epsilon$ , называется  $\epsilon$ -разложением. Нельзя сказать, что  $\epsilon$ -разложение дает хорошо определенные величины, поскольку нас интересуют значения индексов при  $\epsilon = 1$ , что ни в каком смысле не является малой величиной. Тем не менее, если при возрастании  $\epsilon$  от 0 до 1 не происходит никаких бифуркаций, то можно надеяться, что полученная экстраполяция дает качественно правильную картину фазовых переходов. Как показывает сравнение результатов  $\epsilon$ -разложения с экспериментом, первые члены разложения по  $\epsilon$  дают даже неплохое количественное согласие с наблюдаемыми критическими индексами.

Предварительным этапом при проведении  $\epsilon$ -разложения является исследование поведения корреляционных функций параметра порядка в пространстве размерности  $d = 4$ , что является предметом настоящей лекции. Эта задача представляет также несомненный самостоятельный методический интерес, так как выработанные при ее решении идеи находят свое применение и в других областях теоретической физики, например в теории сверхпроводимости или в квантовой теории поля (при исследовании поля Хиггса). Кроме того, некоторая модификация

схемы, развитой для задачи о фазовых переходах в  $d = 4$ , позволяет исследовать поведение вещества в окрестности так называемой трикритической точки. Мы представляем это исследование в настоящей лекции.

### 3.1 Флуктуационные поправки в $d = 4$

Проблема фазовых переходов в размерности  $d = 4$  может быть сформулирована в терминах того же разложения функционала Ландау  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{reg} + \mathcal{F}_{(2)} + \mathcal{F}_{int}$  (смотри лекции 1,2), где

$$\mathcal{F}_{(2)} = \int d^4r \left[ \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{b}{2} (\nabla \varphi)^2 \right], \quad (3.1)$$

$$\mathcal{F}_{int} = \int d^4r \frac{\lambda}{24} \varphi^4. \quad (3.2)$$

Единственная разница по сравнению с трехмерным случаем заключается в том, что интегрирование теперь производится по четырехмерному пространству. Как и раньше (смотри лекцию 2), можно сформулировать теорию возмущений, которая позволяет представить корреляционные функции параметра порядка в виде (асимптотического) ряда по  $\lambda$ . Затравочная парная корреляционная функция  $G_0$  имеет в Фурье-представлении (при  $a > 0$ ) следующий вид

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{T}{a + bq^2}, \quad (3.3)$$

формально совпадающий с выражением при  $d = 3$ . Однако в обычном  $\mathbf{r}$ -представлении для  $d = 4$  мы получаем уже иное выражение, которое при  $r \ll \sqrt{b/a}$  имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} G_0(\mathbf{q}) \simeq \frac{T}{4\pi^2 b r^2}. \quad (3.4)$$

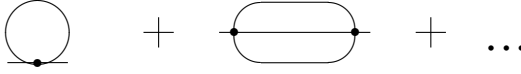
При  $r \gg \sqrt{b/a}$  функция  $G_0(\mathbf{r})$  спадает экспоненциально при увеличении  $r$ .

Далее (если специально не оговорено обратное) мы считаем, что число компонент параметра порядка  $n$  равно единице.

Рассмотрим опять “собственно-энергетическую” функцию  $\Sigma$ , определенную, как сумму одночастично неприводимых диаграмм. Она следующим образом связана с  $G$  (смотри лекцию 2)

$$G(\mathbf{q}) = \frac{T}{a + bq^2 - T\Sigma(\mathbf{q})}. \quad (3.5)$$



Рис. 3.1: Одно- и двухпетлевой вклады в  $\Sigma$ .

Диаграммный ряд для  $\Sigma$  представлен на рисунке 3.1. Приведем явные выражения для первых двух вкладов в  $\Sigma$ , которые называются обычно однопетлевым и двухпетлевым (смотри рисунок 3.1). Однопетлевой вклад в  $d = 4$  имеет формально такой же вид, как и в  $d = 3$ :

$$\Sigma^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda}{2T} G_0(\mathbf{r} = 0) \delta(\mathbf{r}). \quad (3.6)$$

Переходя в Фурье-представление и вычитая в соответствии с (2.17) константу, которая включается в переопределение температуры перехода, мы получаем

$$\Sigma^{(1)}(\mathbf{k}) - \Sigma^{(1)}(T_c, \mathbf{k} = 0) = -\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{a + bq^2} - \frac{1}{bq^2} \right) \simeq \frac{\lambda a}{16\pi^2 b^2} \ln \left( \frac{\Lambda}{\sqrt{a/b}} \right), \quad (3.7)$$

где, как и раньше,  $\Lambda$  является “ультрафиолетовой” обрезкой. Сравнивая выражение (3.7) с (3.5), мы заключаем, что вклад (3.7) дает логарифмическую ренормировку коэффициента  $\alpha$  в соотношении  $a = \alpha(T - T_c)$ .

Двухпетлевой вклад, представленный на рисунке 3.1, в  $\mathbf{r}$ -представлении имеет вид

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda^2}{6T^2} G_0^3(\mathbf{r}) \simeq \frac{\lambda^2 T}{3 \cdot 2^7 \pi^6 b^3 r^6}. \quad (3.8)$$

Последнее выражение в (3.8) справедливо при  $r \ll \sqrt{b/a}$ . Переходя в Фурье-представление и вычитая в соответствии с (2.17) константу, которая включается в переопределение температуры перехода, мы находим

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{q}) - \Sigma^{(2)}(\mathbf{q} = 0, a = 0) \simeq \frac{\lambda^2 T}{3 \cdot 2^7 \pi^6 b^3} \int \frac{d^4 r}{r^6} [e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} - 1] \simeq -\frac{\lambda^2 T}{3 \cdot 2^9 \pi^4 b^3} q^2 \ln \left( \frac{\Lambda}{q} \right), \quad (3.9)$$

справедливое при  $q \gg \sqrt{a/b}$ . Сравнивая (3.9) с (3.5), мы заключаем, что вклад (3.9) в  $\Sigma$  дает логарифмическую ренормировку коэффициента  $b$ .

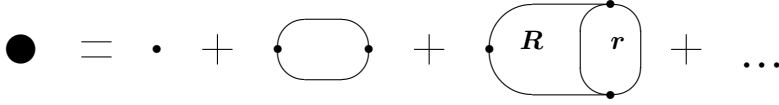


Рис. 3.2: Диаграммный ряд для вершинной функции.

Приведенные выше результаты обобщаются и на вклады в  $\Sigma$  более высокого порядка: все они дают логарифмические поправки к коэффициентам  $\alpha, b$ . Эти поправки становятся существенными при условии

$$\xi > b^2/(T\lambda), \quad (3.10)$$

где  $\xi = \ln(\Lambda/q)$ . Разумеется, невозможно точно отсуммировать все эти вклады. Тем не менее, можно просуммировать их главную последовательность, которая дает правильную асимптотику  $\Sigma$  при  $\xi \gg 1$ .

На диаграммах высокого порядка для  $G$  (или других корреляционных функций) имеются блоки, которые можно рассматривать, как усложнение вершин четвертого порядка, которым сопоставляется множитель  $\lambda$ . Введем соответствующий объект, который мы будем называть вершинной функцией. Вершинная функция представляется суммой неприводимых диаграмм, которые нельзя разрезать на две части вдоль одной линии, и к каждой из которых можно присоединить 4 “ноги” (внешние линии, представляющие  $G$ -функции). Этот диаграммный ряд представлен на рисунке 3.2. Мы будем изучать Фурье-преобразование вершинной функции по разностям координат, считая, что все волновые вектора в этом преобразовании одного порядка,  $\sim q$ . Этот объект мы будем обозначать  $\lambda_r$ . Нулевой вклад в  $\lambda_r$  совпадает просто с  $\lambda$  (и не содержит зависимости от волновых векторов), а вклады более высокого порядка ( $n$ -петлевые) пропорциональны  $\lambda^{n+1}$ .

Первый (однопетлевой) вклад в вершинную функцию аналитически записывается, как

$$-\frac{3\lambda^2}{2T}G_0^2(r), \quad (3.11)$$

где  $r$  – расстояние между точками, к которым присоединяются “ноги”. Делая Фурье-преобразование выражения (3.11), мы находим вклад первого порядка в  $\lambda_r$

$$\lambda_r^{(1)} = -\frac{3\lambda^2 T}{2^4 \pi^2 b^2} \ln(\Lambda/q), \quad (3.12)$$

где подразумевается условие  $q \gg \sqrt{a/b}$ , и мы использовали выражение (3.4). Ответ (3.12) приведен с логарифмической точностью, то есть в



Рис. 3.3: Уравнение для ренормированной константы взаимодействия.

главном порядке по большому логарифму  $\xi = \ln(\Lambda/q)$ . Мы снова убеждаемся в том, что поправки к исходным (затравочным) величинам носят логарифмический характер, и что они становятся существенными при условии (3.10).

## 3.2 Ренормированные величины

Рассмотрим теперь следующий (двухпетлевой) вклад в вершинную функцию, соответствующий второй диаграмме на рисунке 3.2. Соответствующий вклад (второго порядка) в  $\lambda_r$  получается в результате Фурье-преобразования, на этот раз по двум переменным. Результирующая величина имеет порядок  $(\lambda^2 T \xi / b^2)^2$  и является, следовательно, существенной, если выполняется условие (3.10). Нетрудно сообразить, что вторая степень логарифма  $\xi$  происходит из области интегрирования  $\Lambda^{-1} \ll r \ll R \ll q^{-1}$ , где  $R$  и  $r$  – расстояния между вершинами, изображенные на рисунке 3.2. Это наблюдение допускает широкое обобщение. А именно, для диаграммы данного порядка главный по  $\xi$  вклад в  $\lambda_r$  происходит из области интегрирования, которая характеризуется следующей иерархией расстояний между вершинами  $\Lambda^{-1} \ll r_1 \ll r_2 \ll \dots q^{-1}$ . Отнюдь не всякая диаграмма допускает такую полную иерархию. Для этого в диаграмме не должно быть самопересечений линий. Такие диаграммы называются паркетными, так как составляющие ее петли “мостят”, как паркет, часть плоскости. Диаграммы, не являющиеся паркетными, производят меньшую степень логарифма  $\xi$ , чем паркетные с тем же числом вершин. Поэтому сначала мы сосредоточимся на паркетной последовательности.

Рассмотрим паркетную последовательность диаграмм для  $\lambda_r$ . В силу сформулированной иерархии в главной области интегрирования на каждой такой диаграмме можно выделить петлю с наибольшей длиной составляющих ее линий. Тогда блоки слева и справа от этой петли также будут представлять собой вклады в вершинную функцию, но характеризующиеся меньшими размерами. При суммировании паркетной последовательности эти блоки соберутся в полные вершинные функции (точнее, в  $\lambda_r$ ), которые будут зависеть от  $\ln(\Lambda R)$ , где  $R$  – рас-

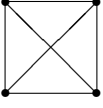


Рис. 3.4: Конверт – пример непаркетной диаграммы.

стояние между блоками. И, наконец, необходимо произвести интегрирование по  $\ln(Rq)$ . В результате мы приходим к уравнению, которое в диаграммном виде представлено на рисунке 3.3, где ренормированная константа взаимодействия  $\lambda_r$  обозначена большим кругом, а затравочная – малым. В аналитическом виде (в главном логарифмическом приближении) это уравнение записывается в следующем виде

$$\lambda_r(\xi) = \lambda - \frac{3T}{2^4\pi^2b^2} \int_0^\xi d\xi' \lambda_r^2(\xi'), \quad (3.13)$$

где, как и выше,  $\xi = \ln(\Lambda/q)$ . Интегральное уравнение (3.13) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$d\lambda_r/d\xi = -\frac{3T}{2^4\pi^2b^2} \lambda_r^2, \quad (3.14)$$

которое имеет следующее решение

$$\lambda_r(\xi) = \lambda \left( 1 + \frac{3T\lambda}{2^4\pi^2b^2} \xi \right)^{-1}, \quad (3.15)$$

где  $\xi = \ln(\Lambda/q)$ . В пределе  $\xi \gg b^2/(T\lambda)$  мы находим следующую асимптотику

$$\lambda_r(\xi) \propto \xi^{-1}. \quad (3.16)$$

Мы заключаем, что эффективная константа связи  $\lambda_r$  стремится к нулю в длинноволновом пределе, то есть при  $\xi \rightarrow \infty$ . Это свойство называется обычно нуль-зарядным, поскольку такое явление было обнаружено первоначально в рамках квантовой электродинамики, где роль константы связи играет квадрат заряда электрона [16, 18].

Теперь мы должны обратиться к отброшенным нами непаркетным диаграммам. Пример такой диаграммы (которую называют обычно “конверт”) приведен на рисунке 3.4. Такая диаграмма дает вклад в  $\lambda_r$ , пропорциональный  $\lambda^4\xi^2$ , который содержит на один логарифм меньше, чем паркетные диаграммы того же порядка. Тем не менее, в пределе  $\xi \rightarrow \infty$  вклад, соответствующий конверту, неограниченно растет,

в то время как в соответствии с (3.15)  $\lambda_r$  стремится к нулю. Поэтому требуется дополнительное обоснование отбрасывания непаркетных диаграмм, которое заключается в следующем. Просуммируем все диаграммы, содержащие данный непаркетный “скелет”. Тогда паркетные блоки соберутся в ренормированные константы взаимодействия (3.15). В результате такой процедуры (“одевания”), например, на конверте, приведенном на рисунке 3.4, затравочные вершины заменятся на “одетые”, которые дадут множители  $\lambda_r$ . Таким образом, “одетый” конверт будет пропорционален  $\lambda_r^4 \xi^2$ . Это дает  $\propto \xi^{-2}$  в длинноволновом пределе, что много меньше, чем  $\lambda_r \propto \xi^{-1}$ . Таким образом, процедура “одевания” делает непаркетные вклады в  $\lambda_r$  малыми.

Основываясь на введенной выше технике, мы можем приступить к исследованию значений параметров  $a_r = \alpha_r(T - T_c)$  и  $b_r$ , которые входят в ренормированное значение парной корреляционной функции  $G$  и логарифмически зависят от характерного масштаба. Чтобы найти уравнения для  $\alpha_r$ , необходимо проделать ту же процедуру, что и для  $\lambda_r$ , то есть выделить на диаграммах для  $\Sigma$  петлю с самыми длинными линиями, после чего правый и левый блоки соберутся при суммировании в ренормированные величины. В результате получается диаграммное уравнение для  $\alpha_r$ . Чтобы выписать его аналитически, можно воспользоваться (3.7), где затравочные величины следует заменить на ренормированные. В результате находим

$$\alpha_r(\xi) = \alpha - \frac{T}{2^4 \pi^2 b^2} \int_0^\xi d\xi' \lambda_r \alpha_r, \quad (3.17)$$

где  $\xi = \ln(\Lambda/q)$ . Мы можем снова перейти к дифференциальному уравнению. Его решение, которое получается после подстановки (3.15), при  $\xi \gg b^2/(T\lambda)$  ведет себя следующим образом:

$$\alpha_r(\xi) \propto \xi^{-1/3}. \quad (3.18)$$

Аналогичным образом, чтобы найти уравнение для  $b_r$ , мы должны заменить в (3.9) затравочные значения  $\lambda$  и  $b$  на их ренормированные значения. В результате мы находим уравнение

$$b_r - b = \int_0^\xi d\xi' \frac{T^2}{3 \cdot 2^9 \pi^4} \frac{\lambda_r^2}{b_r^3}. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.19) имеет решение  $b_r \rightarrow \text{const}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Формальная причина такого поведения заключается в том, что в силу (3.15) интеграл по  $\xi'$  в (3.19) сходится, если  $b_r = \text{const}$ . Это свойство оправдывает

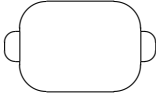


Рис. 3.5: Диаграммное представление сингулярного вклада в теплоемкость.

все приведенные выше вычисления, так как они подразумевали условие  $b = \text{const}$ . Мы заключаем, что, строго говоря, явные выражения типа (3.15) справедливы только в асимптотической области  $\xi \gg b^2/(T\lambda)$  (где под  $b$  надо понимать длинноволновый предел  $b_r$ ). В то же время асимптотические законы типа (3.16, 3.18) являются универсальными.

Все, что было сказано выше, справедливо при условии, что в выражении для ренормированной парной корреляционной функции

$$G(q) = T/(a_r + b_r q^2), \quad (3.20)$$

величиной  $a_r$  можно пренебречь по сравнению с  $b_r q^2$ . Это справедливо, если  $q > \sqrt{a_r/b_r}$  или, другими словами, если характерный масштаб задачи меньше  $\sqrt{b_r/a_r}$ . На масштабе  $R_c = \sqrt{b_r/a_r}$  ренормировка заканчивается, так как флуктуации на больших масштабах подавлены из-за наличия члена  $a_r$  в (3.20). На масштабах больше, чем  $R_c$ , все константы, фигурирующие в ренормированном разложении Ландау, остаются неизменными.

Найдем сингулярный вклад в теплоемкость вблизи точки фазового перехода. Как известно из термодинамики, теплоемкость (при постоянном объеме) определяется через вторую производную от свободной энергии  $C_V = -T d^2 F / dT^2$ . Дифференцируя дважды соотношение (1.5) и принимая во внимание, что главная зависимость от температуры вблизи точки перехода связана с членом (1.6) в разложении Ландау, мы находим для сингулярного вклада в теплоемкость следующее выражение

$$C_{sing} = \frac{V}{4} \alpha^2 \int d^4 r \langle \langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle \rangle, \quad (3.21)$$

которое воспроизводит в  $d = 4$  соотношение (2.34).

Как и выше, при вычислении среднего (3.21) мы можем применить метод “одевания”, который означает, что мы выделяем петлю с самыми длинными линиями в каждой диаграмме, после чего суммирование блоков слева и справа от этой петли даст ренормированные объекты, в данном случае ренормированные значения  $\alpha_r$ . В результате мы получаем диаграммное представление, приведенное на рисунке 3.5, где

полукруги соответствуют  $\alpha_r$ , а линии – (ренормированным) функциям  $G$ . В аналитической форме это соотношение имеет вид

$$C_{sing} = \frac{V}{2} \int d^4r \alpha_r^2 G^2(r). \quad (3.22)$$

После перехода к Фурье-представлению и подстановки (3.18, 3.20) мы приходим к логарифмическому интегрированию, которое производится в пределах  $R_c^{-1} < q < \Lambda$ . В результате мы получаем

$$C_{sing} \propto \xi^{1/3}, \quad (3.23)$$

где  $\xi = \ln(\Lambda R_c)$ .

До сих пор мы имели в виду случай, когда число компонент параметра порядка  $n$  равно единице. Легко обобщить приведенный анализ на случай произвольного числа компонент  $n$  параметра порядка. Это несколько изменит коэффициенты в рассмотренных соотношениях, но асимптотический закон (3.16) и  $b \rightarrow \text{const}$  остаются в неприкосновенности, в то время как степени логарифма в соотношениях (3.18, 3.23) изменяются. Таким образом, само логарифмическое поведение проанализированных величин не зависит от  $n$ , от его значения зависят только детали этого логарифмического поведения.

### 3.3 Трикритическая точка

До сих пор мы рассматривали случай, когда коэффициент  $a$  в разложении Ландау (3.1, 3.2) является аномально малым. Если имеется симметрия, которая делает функционал Ландау инвариантным относительно изменения знака параметра порядка  $\varphi \rightarrow -\varphi$ , то  $a$  является малым в окрестности линии фазовых переходов второго рода на  $P-T$  диаграмме системы, которая определяется условием  $a = 0$ . Возможна ситуация, когда и коэффициент  $\lambda$  в (3.2) также является аномально малым. Это происходит в окрестности некоторых изолированных точек на  $P-T$  диаграмме системы, в которых оба коэффициента  $a$  и  $\lambda$  обращаются в ноль. Такие точки называются трикритическими, окрестность трикритической точки требует особого рассмотрения. Прежде всего, необходимо включить в рассмотрение дополнительный член в разложении Ландау, шестого порядка по параметру порядка:

$$\mathcal{F}_6 = \int d^3r \frac{\lambda_6}{6!} \varphi^6, \quad (3.24)$$

который надо добавить к (3.1, 3.2). При этом следует полагать  $\lambda_6 > 0$ . Обратим внимание на то, что мы вернулись в пространство размерности  $d = 3$ , для этой же размерности будет проделан весь последующий анализ.

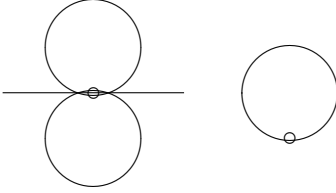


Рис. 3.6: Первые поправки к парной корреляционной функции и четверной вершинной функции.

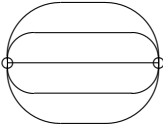


Рис. 3.7: Первый нетривиальный вклад в собственнно-энергетическую функцию.

Несложно проанализировать фазовую диаграмму системы в рамках теории среднего поля. Функционал Ландау  $\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_6$  приводит к следующему условию экстремума для параметра порядка

$$(a + \lambda\varphi^2/6 + \lambda_6\varphi^4/5!)\varphi = 0.$$

Решая это уравнение и определяя затем абсолютный минимум  $\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_6$ , мы приходим к следующей фазовой диаграмме. При больших положительных  $a$  этот минимум соответствует  $\varphi = 0$ , то есть в этой области реализуется симметричная фаза. Если  $\lambda > 0$ , то при уменьшении  $a$  в точке  $a = 0$  происходит фазовый переход второго рода (то есть при изменении  $a$  среднее  $\langle\varphi\rangle$  меняется непрерывно). Если  $\lambda < 0$ , то фазовый переход происходит в точке  $a = 5\lambda^2/(8\lambda_6)$  и сопровождается скачком  $\langle\varphi\rangle \sim \sqrt{|\lambda|/\lambda_6}$ , то есть он является фазовым переходом первого рода. Таким образом точка  $a = 0, \lambda = 0$  является точкой окончания линии переходов второго рода, с которой начинается линия фазовых переходов первого рода. И при учете флуктуаций сохраняется та же топология: на  $P - T$  диаграмме системы трикритические точки разделяют линии фазовых переходов на части, соответствующие фазовым переходам первого и второго родов.

Построим теперь теорию возмущений для окрестности трикритической точки. Далее мы будем считать число компонент параметра порядка  $n$  равным единице.



Мы начинаем с самой трикритической точки, когда  $a = \lambda = 0$ . Тогда затравочная парная корреляционная функция имеет следующий вид

$$G_0(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{T}{bq^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) = \frac{T}{4\pi br}. \quad (3.25)$$

Теория возмущений строится, как разложение по энергии взаимодействия (3.24), что дает ряд по  $\lambda_6$ . Членам разложения в ряд теории возмущений соответствуют диаграммы с линиями, которым сопоставляются функции (3.25), и с вершинами шестого порядка, каждой из которых сопоставляется множитель  $\lambda_6$ . Мы будем обозначать вершины шестого порядка “пустыми” (белыми) дисками с тем, чтобы отличать их от вершин четвертого порядка, которые мы изображаем “залитыми” (черными) дисками. Первая поправка к парной корреляционной функции изображена на рисунке 3.6. На том же рисунке приведен фрагмент диаграммы для парной корреляционной функции, который можно интерпретировать, как первую поправку к четверной вершинной функции. Эта поправка содержит петлю, которая аналитически записывается, как

$$G_0(0) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{T}{bq^2},$$

то есть является ультрафиолетово расходящимся интегралом. Мы уже знаем, что такого рода интегралы надо включать в переопределение соответствующей величины, в данном случае коэффициента  $\lambda$  при  $\varphi^4$  в разложении Ландау. То же относится и к собственно-энергетическому блоку, представленному на первой диаграмме на рисунке 3.6: он содержит ультрафиолетовые расходимости, которые следует включить в переопределение  $a$ , то есть температуры перехода.

Таким образом, первый нетривиальный вклад в собственно-энергетическую функцию имеет второй порядок по  $\lambda_6$ . Единственная нетривиальная диаграмма для собственно-энергетической функции в этом порядке приведена на рисунке 3.7. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид

$$\Sigma(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_6^2}{120T^2} G_0^5, \quad (3.26)$$

где определение  $\Sigma$  соответствует (2.14). Делая Фурье-преобразование и подставляя (3.25), мы находим

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{q}) = \frac{\lambda_6^2 T^3}{120(4\pi)^5 b^5} \int \frac{d^3r}{r^5} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}).$$

Это выражение содержит ультрафиолетовую расходимость (при малых  $r$ ), которую надо включить в переопределение  $a$ . Вычитая эту

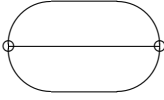


Рис. 3.8: Первая поправка к шестерной вершинной функции.

расходимость, то есть делая замену  $\exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) \rightarrow \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) - 1$  в приведенном выше интеграле, мы находим

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{q}) = -\frac{\lambda_6^2 T^3 q^2}{720(4\pi)^4 b^5} \ln\left(\frac{\Lambda}{q}\right).$$

В соответствии с (3.5) этот вклад можно рассматривать, как следующую поправку к параметру  $b$ :

$$\Delta b = \frac{\lambda_6^2 T^4}{720(4\pi)^4 b^5} \ln\left(\frac{\Lambda}{q}\right). \quad (3.27)$$

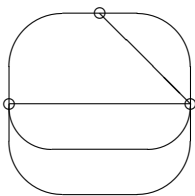
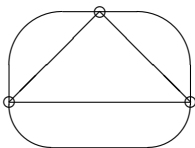
Следуя той же логике, что и ранее, мы переходим к рассмотрению шестерной вершинной функции, которая представляется суммой неприводимых диаграмм, которые нельзя разрезать на две части вдоль одной линии, и к каждой из которых можно присоединить 6 “ног” (внешних линий, представляющих  $G$ -функции). В  $\mathbf{r}$ -представлении шестерная вершинная функция зависит от координат  $\mathbf{r}_i$  шести точек (из которых “исходят”  $G$ -линии), точнее (в однородном случае) от пяти векторов, которые являются разностями типа  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Мы будем изучать Фурье-преобразование вершинной функции по разностям координат, считая, что все волновые вектора в этом преобразовании одного порядка,  $\sim q$ . Этот объект мы будем обозначать  $\lambda_{6r}$ . Нулевой вклад в  $\lambda_{6r}$  совпадает просто с  $\lambda_6$  (и не содержит зависимости от волновых векторов), а вклады более высокого порядка пропорциональны степеням  $\lambda_6$ .

Рассмотрим первую поправку к  $\lambda_{6r}$ , которая представляется диаграммой, изображенной на рисунке 3.8. Аналитическое выражение, соответствующее этой диаграмме, имеет следующий вид

$$\lambda_{6r}^{(1)} = -\frac{5\lambda_6^2}{3T} \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) G_0^3(\mathbf{r}).$$

Подставляя сюда (3.25), мы находим

$$\lambda_{6r}^{(1)} = -\frac{5\lambda_6^2 T^2}{48\pi^2 b^3} \xi, \quad (3.28)$$

Рис. 3.9: Поправка к шестерной вершинной функции, содержащая  $\xi^2$ .Рис. 3.10: Поправка к шестерной вершинной функции, не содержащая  $\xi^2$ .

где  $\xi = \ln(\Lambda/q)$ . Таким образом, первая поправка к  $\lambda_{6r}$  содержит в себе логарифм, который является большим в длинноволновом пределе. Перейдем теперь к поправкам более высокого порядка к  $\lambda_{6r}$ . Примеры поправок третьего порядка по  $\lambda_6$  приведены на рисунках 3.9 и 3.10. При этом диаграмма, приведенная на рисунке 3.9, дает поправку, пропорциональную квадрату логарифма  $\ln(\Lambda/q)$ , в то время как диаграмма, приведенная на рисунке 3.10, содержит лишь первую степень этого логарифма.

Таким образом, мы сталкиваемся с ситуацией, подобной той, которая возникла при анализе ряда теории возмущений для вершины  $\lambda$  в размерности  $d = 4$ . Поэтому дальше можно двигаться в том же направлении, отбирая главную последовательность диаграмм для  $\lambda_{6r}$ , дающих старшие степени логарифмов. Несложно сообразить, что, как и раньше, для диаграммы данного порядка главный по  $\xi$  вклад в  $\lambda_r$  происходит из области интегрирования, которая характеризуется следующей иерархией расстояний между вершинами  $\Lambda^{-1} \ll r_1 \ll r_2 \ll \dots q^{-1}$ . При этом каждому расстоянию в этой иерархии должны соответствовать три  $G$ -линии (иначе при интегрировании по соответствующему расстоянию логарифм не будет произведен). Отнюдь не всякая диаграмма допускает удовлетворять этим условиям. Например, диаграмма, приведенная на рисунке 3.9, этим условиям удовлетворяет (и дает  $\xi^2$ ), а диаграмма, приведенная на рисунке 3.10, не удовлетворяет, несмотря на отсутствие самопересечений (и дает только первую сте-

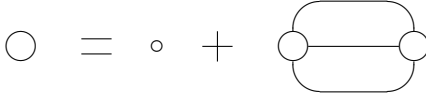


Рис. 3.11: Уравнение для ренормированной константы взаимодействия  $\lambda_6$ .

пень  $\xi$ ).

Выделим последовательность диаграмм, дающих главные степени логарифма. В силу сформулированной иерархии в главной области интегрирования на каждой такой диаграмме можно выделить тройку  $G$ -линий с наибольшей длиной. Тогда блоки слева и справа от этой петли также будут представлять собой вклады в вершинную функцию, но характеризуются меньшими размерами. При суммировании главной последовательности диаграмм эти блоки соберутся в полные вершинные функции (точнее, в  $\lambda_r$ ), которые будут зависеть от  $\ln(\Lambda R)$ , где  $R$  – расстояние между блоками. И, наконец, необходимо произвести интегрирование по  $\ln(Rq)$ . В результате мы приходим к уравнению, которое в диаграммном виде представлено на рисунке 3.11, где ренормированная константа взаимодействия  $\lambda_{6r}$  обозначена черным кругом. В аналитическом виде (в главном логарифмическом приближении) это уравнение записывается в следующем виде

$$\lambda_{6r}(\xi) = \lambda_6 - \frac{5T^2}{48\pi^2 b^3} \int_0^\xi d\xi' \lambda_{6r}^2(\xi'), \quad (3.29)$$

Интегральное уравнение (3.29) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$d\lambda_{6r}/d\xi = -\frac{5T^2}{48\pi^2 b^3} \lambda_{6r}^2, \quad (3.30)$$

которое имеет следующее решение

$$\lambda_{6r}(\xi) = \lambda_6 \left( 1 + \frac{5T^2 \lambda_6}{48\pi^2 b^3} \xi \right)^{-1}, \quad (3.31)$$

где  $\xi = \ln(\Lambda/q)$ . В пределе  $\xi \gg b^3/(T^2 \lambda_6)$  мы находим следующую асимптотику

$$\lambda_{6r}(\xi) \propto \xi^{-1}, \quad (3.32)$$

аналогично (3.16).

Далее можно проверить, что отброшенные диаграммы (точнее, блоки, в которых главные последовательности собраны в ренормированную вершину) дают малые поправки к шестерной вершине. Это дает



Рис. 3.12: Уравнение для ренормированной константы взаимодействия  $\lambda$ .

обоснование приведенного ответа. Таким образом, мы получили схему, которая весьма близка к суммированию паркетных диаграмм, и дает логарифмическую ренормировку эффективной константы взаимодействия непосредственно в трехмерном пространстве.

Теперь мы можем рассмотреть ренормировку коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $\lambda$ , входящих в функционал Ландау  $\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_6$ . Их исследование производится также, как это делалось для самой вершинной функции  $\lambda_6$  (и в полной аналогии с тем, как это делалось для паркетных диаграмм). А именно, для каждого объекта мы должны выделить главную последовательность диаграмм и просуммировать ее. Выделение идет по степеням логарифма, которые производят “пучки” из трех  $G$ -линий. Опять-таки, старшие степени логарифма производят диаграммы, в которых имеется иерархия размеров  $G$ -линий. Выделяя сечение с максимальным размером  $G$ -линий и суммируя блоки слева и справа от этого сечения, мы получаем для ренормированной четверной вершинной функции  $\lambda_r$  уравнение, в диаграммном виде представленное на рисунке 3.12, где, как и выше, малый кружок представляет затравочное значение  $\lambda$ , а большой – ренормированное значение  $\lambda_r$ . Это диаграммное уравнение переписывается в виде интегрального уравнения, которое сводится к следующему дифференциальному

$$\frac{d\lambda_r}{d\xi} = -\frac{T^2\lambda_{6r}}{96\pi^2b^3}\lambda_r, \quad (3.33)$$

решение которого имеет вид

$$\lambda_r = \lambda \left( 1 + \frac{5T^2\lambda_6}{48\pi^2b^3}\xi \right)^{-2/5}, \quad (3.34)$$

то есть в длинноволновом пределе  $\lambda_r \propto \xi^{-2/5}$ . Также можно получить и уравнение для  $b$ . Выделяя сечение с максимальным размером  $G$ -линий и суммируя блоки слева и справа от этого сечения, мы получаем для поправки к  $b$  выражение, которое определяется диаграммой, представленной на рисунке 3.7, где затравочные вершинные функции  $\lambda_6$  следует заменить на ренормированные  $\lambda_{6r}$ . В результате мы полу-

чаем интегральное уравнение, которое сводится к следующему дифференциальному

$$\frac{db_r}{d\xi} = \frac{T^4 \lambda_r^2}{5 \cdot 3^2 \cdot 2^8 \pi^4 b_r^5}. \quad (3.35)$$

Отсюда следует, что в длинноволновом пределе (то есть при  $\xi \rightarrow \infty$ )  $b_r$  выходит на константу. Это оправдывает наши вычисления, в которых мы считали  $b$  константой.

Интересно, что диаграмм, дающих логарифмические поправки к параметру  $a$ , нет. Это означает, что отклонение ренормированной величины  $a$  от ее затравочного значения мало. Таким образом, фазовая диаграмма системы вблизи трикритической точки практически совпадает со среднеполевой. При  $\lambda > 0$  критический радиус  $r_c$  дается своим среднеполевым выражением:  $r_c = \sqrt{b/|a|}$ , который стремится к бесконечности при  $a \rightarrow 0$ . Далее, аномальный вклад в теплоемкость определяется той же диаграммой, представленной на рисунке 3.5. Соответствующее аналитическое выражение пропорционально  $\int d^3r G^2(r) \propto r_c$ . Сингулярный же вклад в теплоемкость ведет себя  $\propto |a|^{-1/2}$  при  $\lambda > 0$ . Коэффициент в этом законе несколько меняется при  $\lambda^2 \sim |a|\lambda_6$ . (Здесь в качестве  $\lambda$ ,  $\lambda_6$  надо брать их ренормированные значения на масштабе  $r_c$ .) Закон  $\propto |a|^{-1/2}$  для теплоемкости справедлив до тех пор, пока не станет существенной ренормировка  $a$ , связанная с вкладом четвертого порядка (с фактором  $\lambda$ ) в функционал Ландау, которую мы до сих пор игнорировали. Эта ренормировка существенна в некоторой окрестности фазового перехода, где должно наблюдаться поведение, характерное для фазовых переходов второго рода (со степенной зависимостью теплоемкости от  $T - T_c$ ).

## Задачи

### Задача 3.1

Найти критерий применимости закона  $\propto |a|^{-1/2}$  для теплоемкости в окрестности трикритической точки при  $\lambda > 0$ .

#### Решение задачи 3.1

Мы уже установили (смотри лекцию 2), что флуктуационные поправки к корреляционным функциям становятся существенными при  $|a| < T_c (da/dT) \text{Gi}$ , где Gi – число Гинзбурга, определяемое выражением (2.21). Отсюда мы находим, что степенное поведение теплоемкости, характерное для флуктуационной окрестности фазового перехода второго рода, должно наблюдаться при  $|a| \lesssim T_c^2 \lambda^2 / b^3$ . В этот критерий

надо подставлять ренормированное значение фактора  $\lambda$ , соответствующее масштабу  $\sim q_*^{-1}$ , где  $q_*$  определяется выражением (2.24). В силу слабой (логарифмической) зависимости  $\lambda$  от масштаба при  $q_* r \gtrsim 1$  в эти оценки можно подставлять затравочное значение  $\lambda$ .

### Задача 3.2

При фазовом переходе в состояние одноосного сегнетоэлектрика параметром порядка является смещение  $\varphi$  подрешеток кристалла вдоль фиксированного направления. В этом случае при описании фазового перехода надо принимать во внимание электрическую дипольную энергию, которую можно записать в следующем виде

$$\mathcal{F}_{dip} = \frac{\mu}{8\pi} \int d^3 r_1 d^3 r_2 \partial_z \varphi(\mathbf{r}_1) \partial_z \varphi(\mathbf{r}_2) \frac{1}{r}, \quad (3.36)$$

где ось  $Z$  направлена вдоль направления смещения подрешеток,  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  и  $\mu$  характеризует силу дипольного взаимодействия. Найти характер зависимости сингулярного вклада в теплоемкость от температуры в окрестности этого фазового перехода [26].

### Решение задачи 3.2

Принимая во внимание дипольную энергию (3.36) наряду со вкладом второго порядка (2.5), мы находим для затравочной парной корреляционной функции

$$G(\mathbf{q}) = \frac{T}{a + b q^2 + \mu q_z^2 / q^2}. \quad (3.37)$$

Мы видим сильную анизотропию свойств одноосного сегнетоэлектрика. За счет дипольного члена в выражении (3.37) интегралы по  $\mathbf{q}$  набираются на малых  $q_z = q \cos \theta$ . Поэтому интегрирования по  $\mathbf{q}$  переписываются в “четырёхмерном” виде:

$$d^3 q \rightarrow 2\pi q^2 dq d \cos \theta \rightarrow 2\pi \sqrt{b/\mu} q^2 dq dk_4 \rightarrow (1/2) \sqrt{b/\mu} d^4 k, \quad (3.38)$$

где  $k_{1,2,3} = q_{x,y,z}$  и  $k_4 = \sqrt{\mu/b} \cos \theta$ . При этом выражение (3.37) приобретает стандартный вид:  $G(k) = T/(a + b k^2)$ . Преобразование (3.38) работает в логарифмических интегралах, которые как раз и возникают при “четырёхмерном” характере интегрирования. Таким образом, задача о фазовом переходе в одноосном сегнетоэлектрике в главном логарифмическом приближении эквивалентна задаче о стандартном фазовом переходе в  $d = 4$  для  $n = 1$ . Мы заключаем, что сингулярный вклад в теплоемкость при фазовом переходе в одноосном сегнетоэлектрике ведет себя логарифмически,  $C_{sing} \propto \xi^{1/3}$ . Здесь, как и прежде,  $\xi = \ln(\Lambda r_c)$ , а критический радиус  $r_c$  определяется из стандартного

соотношения  $r_c = \sqrt{b/|a|}$ . Отметим, что эта величина определяет корреляционную длину параметра порядка в плоскости  $(X, Y)$ , в то время как для направления смещения разумнее говорить о характерном значении  $\cos \theta$ , которое оказывается равным  $\sqrt{|a|/\mu}$ .



## Лекция 4

# Ренорм-группа, $\epsilon$ -разложение

Мы начинаем эту лекцию с перевывода результатов, полученных в лекции 3, используя несколько иной язык, который оказывается более удобным и допускает широкое обобщение. Речь идет о так называемом методе ренорм-группы, который был первоначально сформулирован в квантовой теории поля [18], но нашел весьма широкое применение в задачах, возникающих в теории конденсированного состояния. Обсуждение метода ренорм-группы в контексте фазовых переходов можно найти в работах [21, 22, 23, 24]. Там же можно найти детальное обсуждение различных случаев, к которым применим этот метод. Затем мы распространяем ренорм-групповой метод на размерность  $d = 4 - \epsilon$ , формулируя так называемое  $\epsilon$ -разложение для критических индексов.

### 4.1 Выделение быстрых переменных

Напомним, что проблема, которую мы рассматривали в лекции 3, задается функционалом Ландау

$$\mathcal{F} = \int d^4r \left\{ \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{b}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\lambda}{24} (\varphi^2)^2 \right\}, \quad (4.1)$$

определенным в пространстве размерности  $d = 4$ . Мы полагаем, что  $\varphi$  –  $n$ -компонентный параметр порядка, тогда в (4.1)

$$\varphi^2 \equiv \sum_{a=1}^n \varphi_a^2.$$

Напомним также, что задача подразумевает наличие “ультрафиолетовой” обрезки (предельного волнового вектора)  $\Lambda$ .

Как мы видели при анализе диаграммного разложения в лекции 3, в размерности  $d = 4$ , корреляционные функции параметра порядка на некотором масштабе  $r$  перенормируются за счет взаимодействия  $\varphi$  на этом масштабе с флуктуациями  $\varphi$ , имеющими волновые вектора  $q$  в интервале  $r^{-1} < q < \Lambda$ . Вообще говоря, ренормировка корреляционных функций может оказаться значительной. Тем не менее, константа взаимодействия остается малой. Поэтому мы ожидаем, что взаимодействие с флуктуациями из ограниченной области фазового пространства производит только небольшую ренормировку корреляционных функций на данном масштабе  $r$ . Это соображение мотивирует следующую многоступенчатую процедуру, имеющую целью постепенное (шаг за шагом) вычисление поправок к корреляционным функциям.

Разобьем параметр порядка на два слагаемых, “медленную” часть  $\varphi'$  и “быструю” часть  $\tilde{\varphi}$ :

$$\varphi = \varphi' + \tilde{\varphi}. \quad (4.2)$$

Здесь  $\tilde{\varphi}$  является суммой Фурье-гармоник с самыми большими волновыми векторами, а  $\varphi'$  содержит все остальные Фурье-гармоники. Далее, мы собираемся исключить из рассмотрения быстрые степени свободы, проинтегрировав функцию распределения  $\exp(-\mathcal{F}/T)$  по  $\tilde{\varphi}$ :

$$\exp \left[ -\frac{\mathcal{F}'(\varphi')}{T} \right] = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \exp \left[ -\frac{\mathcal{F}(\varphi' + \tilde{\varphi})}{T} \right]. \quad (4.3)$$

Здесь  $\mathcal{F}'$  имеет смысл функционала Ландау для “медленной” части параметра порядка  $\varphi'$ . Этот функционал содержит в себе полную информацию о корреляционных функциях параметра порядка на достаточно больших масштабах (или на достаточно малых волновых векторах), содержащихся в  $\varphi'$ . Скажем, в терминах  $\mathcal{F}'$  можно записать парную корреляционную функцию

$$G(r) = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi}' \exp \left[ -\frac{\mathcal{F}'(\varphi')}{T} \right] \varphi'(r) \varphi'(0), \quad (4.4)$$

при условии  $\Lambda r \gg 1$ , так как вклад в  $G(r)$  от быстрых степеней свободы является пренебрежимым. Прodelывая процедуру исключения быстрых степеней свободы (4.3) снова и снова, мы можем проинтегрировать по всем Фурье-гармоникам  $\varphi$  с волновыми векторами в интервале  $r^{-1} < q < \Lambda$ . После этого уже можно будет вычислять корреляционную функцию (4.4) в рамках обычной теории возмущений, причем в силу малости константы взаимодействия главным будет нулевое приближение (определяемое квадратичной частью функционала Ландау).

Разумеется,  $\mathcal{F}'$ , вычисленное в соответствии с (4.3), отличается от исходного функционала  $\mathcal{F}$ . Но если фазовый объем быстрых переменных  $\tilde{\varphi}$  достаточно мал, то и поправка  $\mathcal{F}'(\varphi') - \mathcal{F}(\varphi')$  будет мала и ее можно вычислять по теории возмущений. Это приведет к тому, что параметры, входящие в функционал Ландау, будут постепенно меняться при применении введенной многошаговой процедуры. Такое изменение может быть описано в рамках соответствующих дифференциальных уравнений, которые называются ренорм-групповыми (РГ) уравнениями. Мы начинаем с вывода РГ-уравнения для функционала Ландау (4.1) в пространстве размерности  $d = 4$ .

Сначала мы должны более аккуратно определить разделение степеней свободы (4.2), производимого на единичном шаге введенной процедуры. Мы будем полагать, что быстрый вклад  $\tilde{\varphi}$  является суммой Фурье-гармоник с волновыми векторами  $\Lambda' < q < \Lambda$ , тогда медленная компонента  $\varphi'$  будет суммой Фурье-гармоник с волновыми векторами  $q < \Lambda'$ . Мы предполагаем также, что выполняются следующие условия

$$\Lambda \gg \Lambda', \quad (4.5)$$

$$g \ln(\Lambda/\Lambda') \ll 1, \quad (4.6)$$

где  $g$  – безразмерная константа связи, введенная в лекции 3 (смотри также ниже). Конечно, условия (4.5) и (4.6) совместимы, только если константа связи мала,  $g \ll 1$ , что является условием применимости техники РГ. Условие (4.6) позволяет использовать стандартное разложение в ряд теории возмущений, а условие (4.5) позволяет производить отбор различных вкладов по большому логарифму  $\ln(\Lambda/\Lambda')$ .

Подставляя сумму (4.2) в (4.1) мы находим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi') + \mathcal{F}_{int}^{(2)} + \mathcal{F}^{(2)}(\tilde{\varphi}) + \dots, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{F}_{int}^{(2)} = \int d^4r \left\{ \frac{\lambda}{12} \varphi'^2 \tilde{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{6} (\varphi' \tilde{\varphi})^2 + \frac{a}{2} \tilde{\varphi}^2 \right\}, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{F}^{(2)}(\tilde{\varphi}) = \int d^4r \frac{b}{2} (\nabla \tilde{\varphi})^2, \quad (4.9)$$

где ... обозначает ряд опущенных членов. Мы опустили член

$$\int d^4r \frac{\lambda}{6} (\tilde{\varphi} \varphi') \varphi'^2,$$

так как он не может производить поправки к  $\mathcal{F}$ , пропорциональные большому логарифму  $\ln(\Lambda/\Lambda')$  в силу того, что этот член отличен от нуля только для Фурье-гармоник  $\tilde{\varphi}$  с волновыми векторами  $q$ , близкими к  $\Lambda'$ . Мы пренебрегли в (4.7) также членами третьего и четвертого

порядка по  $\tilde{\varphi}$ , так как они производят малые поправки к функционалу Ландау при интегрировании (4.3) в силу условия (4.6). Обратим внимание на то, что мы включили член второго порядка, пропорциональный  $a$ , в  $\mathcal{F}_{int}$ . Это удобно по формальным соображениям (позволяет проще выделять ультрафиолетовые расходимости), а также позволяет не заботиться о знаке  $a$  при проведении ренорм-групповой процедуры.

Подставляя разложение (4.8) в соотношение (4.3) мы находим

$$\exp \left[ -\frac{\mathcal{F}'(\varphi') - \mathcal{F}(\varphi')}{T} \right] = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \exp \left[ -\frac{\mathcal{F}(\tilde{\varphi}) + \mathcal{F}_{int}}{T} \right]. \quad (4.10)$$

В силу условия (4.6) разность  $\mathcal{F}'(\varphi') - \mathcal{F}(\varphi')$  мала и мы можем разложить экспоненту в левой части соотношения (4.10) по этой разности. По тем же причинам можно разложить правую часть (4.10) по  $\mathcal{F}_{int}$ . В результате мы получаем

$$\mathcal{F}'(\varphi') - \mathcal{F}(\varphi') = \langle \mathcal{F}_{int} \rangle - \frac{1}{2T} \left\langle\left\langle (\mathcal{F}_{int})^2 \right\rangle\right\rangle. \quad (4.11)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по статистике быстрых степеней свободы. Мы удержали в правой части (4.11) два первых члена разложения экспоненты по  $\mathcal{F}_{int}$ .

Вообще говоря, надо быть аккуратным с порядком разложения. Общее правило заключается в том, что надо удерживать все порядки разложения по  $\mathcal{F}_{int}$ , дающие нужную степень большого логарифма  $\ln(\Lambda/\Lambda')$  (эта степень зависит от того, с какой точностью требуется получить уравнения ренорм-группы). Обратим внимание на то, что в правой части (4.11) фигурирует неприводимое среднее от  $\mathcal{F}_{int}^2$  (обозначенное двойными угловыми скобками). Это является следствием сокращения приводимой части  $\langle \mathcal{F}_{int}^2 \rangle$  с вкладом  $\langle \mathcal{F}_{int} \rangle^2$ , возникающим из члена второго порядка в разложении поправки к свободной энергии. Это можно увидеть из разложения соотношения (4.10), которое дает первую поправку  $\langle \mathcal{F}_{int} \rangle$  к свободной энергии. Аналогичные сокращения имеют место и в более высоких членах разложения соотношения (4.11) по  $\mathcal{F}_{int}$ . Поэтому надо быть аккуратным при подсчете степени  $\ln(\Lambda/\Lambda')$ , которое дает тот или иной порядок разложения по  $\mathcal{F}_{int}$ . Как правило, главный вклад дают несколько первых членов разложения (в нашем случае два).

В главном приближении по константе взаимодействия статистика быстрых степеней свободы определяется функцией распределения вероятности

$$\mathcal{P}(\tilde{\varphi}) \propto \exp \left[ -\frac{\mathcal{F}^{(2)}(\tilde{\varphi})}{T} \right], \quad (4.12)$$

определяемой квадратичной частью функционала Ландау. Так как функция распределения (4.12) является Гауссовой, все корреляционные функции  $\tilde{\varphi}$  сводятся к парной корреляционной функции  $\tilde{G}$ :

$$\langle \tilde{\varphi}_a(\mathbf{r}_1) \tilde{\varphi}_b(\mathbf{r}_2) \rangle = \tilde{G}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta_{ab}.$$

Функция  $\tilde{G}$  может быть вычислена, исходя из (4.12):

$$\tilde{G}(\mathbf{r}) = \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{T}{bq^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \approx \frac{T}{4\pi^2 b r^2}, \quad (4.13)$$

Последнее выражение (в  $\mathbf{r}$ -представлении) справедливо при  $\Lambda'^{-1} > r > \Lambda^{-1}$ .

В силу той же Гауссовости функции распределения вероятности (4.12) можно легко явно выписать все средние в (4.11). Например

$$\langle \mathcal{F}_{int}^{(2)} \rangle = \int d^4 r \frac{\lambda}{12} (n+2) \varphi'^2 \langle \tilde{\varphi}_1^2 \rangle + \dots, \quad (4.14)$$

где мы приняли во внимание, что  $\langle \tilde{\varphi}_a \tilde{\varphi}_b \rangle \propto \delta_{ab}$ . Среднее  $\langle \tilde{\varphi}_1^2 \rangle$  фигурирующее в (4.14), может быть найдено с использованием выражения (4.13):

$$\langle \tilde{\varphi}_1^2 \rangle = \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{T}{bq^2}.$$

Это “ультрафиолетовый” вклад (“сядящий” на верхнем пределе интегрирования), который следует включить в переопределение температуры перехода  $T_c$ .

Теперь мы переходим ко второму члену в соотношении (4.11). Подставляя в него выражение (4.8) мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\varphi') - \mathcal{F}(\varphi') &\leftarrow -\frac{1}{T} \int d^4 r_1 d\mathbf{r}_2 \tilde{G}^2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &\times \left\{ \frac{(n+8)\lambda^2}{4 \cdot 27} \varphi'^2(\mathbf{r}_1) \varphi'^2(\mathbf{r}_2) + \frac{(n+2)\lambda a}{12} \varphi'^2(\mathbf{r}_1) + \frac{na^2}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Функция  $\tilde{G}(r)$  затухает, начиная с масштаба  $\Lambda'^{-1}$ , в то время как поле  $\varphi'$  изменяется на больших масштабах. Поэтому в главном приближении мы можем подставить  $\varphi'^2(\mathbf{r}_2) \rightarrow \varphi'^2(\mathbf{r}_1)$  в первом члене в (4.15), в результате мы находим следующий вклад

$$\mathcal{F}' - \mathcal{F} \leftarrow -\frac{\lambda^2}{36T} \int d^4 r \varphi'^4(\mathbf{r}) \int d^4 R \tilde{G}^2(\mathbf{R}). \quad (4.16)$$

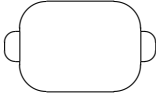


Рис. 4.1: Диаграммное представление поправок к крупномасштабным величинам.

Интеграл здесь легко вычисляется после подстановки (4.13):

$$\int d^4r \tilde{G}^2(\mathbf{R}) \approx \frac{T^2 S_4}{(2\pi)^4 b^2} \Delta\xi, \quad (4.17)$$

где  $\Delta\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ , а  $S_4 = 2\pi^2$  – поверхность единичной сферы в четырехмерном пространстве. Таким образом, вклад (4.16) содержит большой логарифм. Структура вклада (4.16) показывает, что за его счет ренормируется член четвертого порядка в функционале Ландау, эту ренормировку можно записать в виде поправки к фактору  $\lambda$ :

$$\Delta\lambda = -\frac{n+8}{6} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda^2 \Delta\xi. \quad (4.18)$$

Далее, используя (4.17), мы можем найти дополнительные вклады в  $\mathcal{F}' - \mathcal{F}$ , происходящие из правой части (4.15). Один из них дает ренормировку  $a$ , поправка к этому параметру равна

$$\Delta a = -\frac{n+2}{6} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda a \Delta\xi. \quad (4.19)$$

И, наконец, последний вклад дает ренормировку свободной энергии

$$\Delta F = -\frac{na^2}{4} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \Delta\xi. \quad (4.20)$$

Отметим, что все найденные поправки можно изобразить при помощи диаграммы, приведенной на рисунке 4.1, где линии соответствуют парным корреляционным функциям быстрых переменных, а полукруги соответствуют факторам в членах взаимодействия быстрых степеней свободы с медленными (крупномасштабными). Это единообразие и объясняет появление логарифма  $\Delta\xi$  во всех найденных выражениях.

## 4.2 Ренорм-групповые уравнения

Мы рассмотрели единичный шаг. Если теперь повторить его многократно, то функционал Ландау сохранит свою форму (как следует из

проделанного выше анализа), но коэффициенты  $a$  и  $\lambda$  будут постепенно изменяться при последовательном исключении быстрых переменных. Так как поправки (4.18,4.19) малы на каждом шаге нашей процедуры, мы можем описывать вариации  $a$ ,  $\lambda$  и свободной энергии  $F$  в терминах дифференциальных уравнений

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = -\frac{n+8}{6} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda^2, \quad (4.21)$$

$$\frac{da}{d\xi} = -\frac{n+2}{6} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda a, \quad (4.22)$$

$$\frac{dF}{d\xi} = -\frac{na^2}{4} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2}, \quad (4.23)$$

следующих из (4.19,4.18,4.20). Здесь  $\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ , где  $\Lambda'$  – текущая обрезка (то есть максимальный волновой вектор  $\varphi'$ ). Именно уравнения типа (4.21-4.23) называются обычно ренорм-групповыми (РГ). Найденные нами уравнения справедливы в ведущем порядке по  $\xi$ . Они называются обычно однопетлевыми, так как соответствующие поправки к крупномасштабным параметрам при исключении быстрых переменных изображаются однопетлевыми диаграммами по быстрым переменным (рисунок 4.1).

Удобно переписать РГ-уравнения (4.21,4.22) в терминах безразмерной константы связи  $g$

$$\frac{dg}{d\xi} = -g^2, \quad (4.24)$$

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = -g\lambda, \quad (4.25)$$

$$\frac{da}{d\xi} = -\frac{n+2}{n+8} ga. \quad (4.26)$$

$$g = \frac{n+8}{6} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda. \quad (4.27)$$

Численный множитель в выражении (4.27) подобран так, чтобы коэффициент в РГ-уравнении (4.24) был равен единице. Так определенная безразмерная константа связи называется обычно инвариантным зарядом. Подчеркнем, что рассмотренные РГ-уравнения отнюдь не подразумевают условие малости  $g\xi$ , этот параметр может быть произвольным, что и дает возможность сильной ренормировки всех параметров теории.

В однопетлевом приближении, которое было использовано выше, коэффициент  $b$ , который фигурирует в градиентном члене в (4.1), не

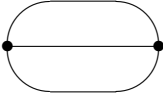


Рис. 4.2: Двухпетлевая поправка к крупномасштабному функционалу Ландау.

изменяется. Чтобы найти его ренормировку, необходимо учесть члены более высокого порядка по  $\tilde{\varphi}$  в  $\mathcal{F}_{int}$ . А именно, надо принять во внимание член третьего порядка

$$\mathcal{F}_{int}^{(3)} = \frac{\lambda}{6} \int d^4r (\varphi' \tilde{\varphi}) \tilde{\varphi}^2. \quad (4.28)$$

Поскольку  $\langle \mathcal{F}_{int}^{(3)} \rangle = 0$ , следует учесть только тот вклад в  $\mathcal{F}' - \mathcal{F}$ , который определяется вторым членом в правой части (4.11). Подставляя в него выражение (4.28), мы находим

$$\mathcal{F}' - \mathcal{F} \leftarrow -\frac{(n+2)\lambda^2}{36T} \int d^4r_1 d^4r_2 \varphi'(\mathbf{r}_1) \varphi'(\mathbf{r}_2) \tilde{G}^3(\mathbf{r}), \quad (4.29)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Заметим, что поправка (4.29) представляется уже двухпетлевой диаграммой, приведенной на рисунке 4.2, где вершинам сопоставляется множитель  $\lambda\varphi'$ . Таким образом, мы вышли за рамки однопетлевого приближения, что означает учет членов более высокого порядка по константе взаимодействия  $g$  в ренорм-групповых уравнениях.

Опять-таки, характерное значение  $\mathbf{r}$  в выражении (4.29) определяется  $\Lambda'^{-1}$ , в то время как  $\varphi'$  является медленным полем, которое меняется на больших масштабах. Поэтому в главном приближении мы можем заменить  $\varphi'(\mathbf{r}_2)$  на  $\varphi'(\mathbf{r}_1)$ . Тогда (в Фурье-представлении) мы получим фактор, который определяется “ультрафиолетовым” интегралом по  $q$  (сидящим на верхнем пределе), этот фактор следует включить в переопределение температуры перехода  $T_c$ . Чтобы найти ренормировку  $b$ , мы должны разложить  $\varphi'(\mathbf{r}_2)$  по  $\mathbf{r}$ :

$$\varphi'(\mathbf{r}_2) = \varphi'(\mathbf{r}_1) + r_\alpha \nabla_\alpha \varphi'(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} r_\alpha r_\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi'(\mathbf{r}_1) + \dots$$

Первый член этого разложения не вносит вклад в  $\mathcal{F}' - \mathcal{F}$  (соответствующий интеграл равен нулю из-за интегрирования нечетной функции по углам). Таким образом надо учесть второй член разложения  $\varphi'(\mathbf{r}_2)$ ,



который дает следующую поправку

$$\mathcal{F}' - \mathcal{F} \leftarrow \frac{(n+2)\lambda^2}{9 \cdot 32T} \int d^4 r_1 d^4 r [\nabla \varphi'(\mathbf{r}_1)]^2 \tilde{G}^3(\mathbf{r}) r^2.$$

Мы произвели здесь усреднение по углам и один раз взяли интеграл по частям. Подставляя сюда выражение (4.13), мы находим

$$\Delta b = \frac{(n+2)\lambda^2 T^2}{9 \cdot 2^9 \pi^4 b^3} \Delta \xi. \quad (4.30)$$

Соответствующее РГ-уравнение имеет вид

$$\frac{db}{d\xi} = \frac{n+2}{2(n+8)^2} g^2 b. \quad (4.31)$$

Мы видим, что правая часть уравнения (4.31) пропорциональна второй степени инвариантного заряда  $g$ , что является выражением того факта, что ренормировка  $b$  возникает только во втором порядке по константе связи (в двухпетлевом приближении).

### 4.3 $\epsilon$ -разложение

Как мы установили, в пространствах размерности  $d = 3, 4$  в некоторой окрестности фазового перехода флуктуационные эффекты оказываются столь сильными, что перестраивают корреляции параметра порядка. В то же время в размерностях  $d > 4$  в теории возмущений для корреляционных функций параметра порядка отсутствуют вклады, которые “сидят” на больших масштабах. Разумеется, в теории возмущений остаются ультрафиолетовые интегралы, которые надо включать в переопределение той или иной наблюдаемой величины (например, температуры перехода). Но это не приводит к перестройке корреляций параметра порядка. Поэтому при  $d > 4$  на всех масштабах работает теория среднего поля. В этом смысле размерность  $d = 4$  является, как говорят, маргинальной (пограничной), поскольку отделяет размерности  $d > 4$ , где флуктуационные эффекты слабы, от размерностей  $d < 4$ , где они сильны.

В самой маргинальной размерности  $d = 4$ , как мы убедились, все ренормировки носят логарифмический характер, и все эти ренормировки могут быть последовательно вычислены. В размерностях же  $d < 4$  их исследование сталкивается с большими трудностями, поскольку такой эффективный отбор диаграмм, как в маргинальной размерности, в меньших размерностях оказывается невозможным. Тем не

менее, такой отбор возможен в размерности  $4 - \epsilon$ , где  $\epsilon \ll 1$ . Но прежде, чем рассуждать о малых  $\epsilon$ , надо придать смысл нашей процедуре в нецелой размерности. Для этого заметим, что ряд теории возмущений формулируется на диаграммном языке в пространстве произвольной целой размерности  $d$ . А далее надо сделать аналитическое продолжение, соответствующее каждой диаграмме, на пространство произвольной размерности  $d$ . В результате мы получим ряд теории возмущений в пространстве произвольной размерности.

Те же соображения, касающиеся аналитического продолжения, остаются в силе и для ренорм-групповой процедуры. В пространстве  $d = 4 - \epsilon$  при  $\epsilon > 0$  интегралы, определяющие поправку к той или иной величине при элементарном шаге РГ-процедуры, будут уже не логарифмическими, а степенными, то есть будут пропорциональными некоторой отрицательной степени  $\Lambda'$ . Можно легко проверить, что если сохранить (при  $\epsilon \ll 1$ ) главные по  $\epsilon$  члены в выражениях для поправок ко всем величинам ( $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$ ), то это сведется к тем же выражениям для поправок, что и выше, если они выражаются через инвариантный заряд  $g$ . Но только вместо выражения (4.27) для инвариантного заряда  $g$  следует использовать следующее выражение

$$g = \frac{n+8}{6} \frac{S_d}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda(\Lambda')^{-\epsilon}, \quad (4.32)$$

где  $S_d$  – поверхность единичной сферы в пространстве размерности  $d = 4 - \epsilon$ .

Переходя затем к уравнениям ренорм-группы, мы заключаем, что РГ-уравнения (4.25, 4.26, 4.31) сохраняют свою форму, в то время как вместо уравнения (4.24) из упомянутых уравнений и определения (4.32) мы получаем для инвариантного заряда

$$\frac{dg}{d\xi} = \epsilon g - g^2. \quad (4.33)$$

Это уравнение имеет фиксированную точку  $g = \epsilon$ . Обратим внимание на то, что эта фиксированная точка является устойчивой, и поэтому  $g \rightarrow \epsilon$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Подставляя  $g = \epsilon$  в (4.25, 4.26, 4.31), мы получаем решения для  $a$ ,  $\lambda$ ,  $b$ , которые ведут себя, как степени текущей обрезки  $\Lambda'$ . В частности

$$a \propto (T - T_c)(\Lambda')^{(n+2)/(n+8)\epsilon}. \quad (4.34)$$

Поскольку мы нашли  $g \approx \epsilon$ , то наша схема работает только при условии  $\epsilon \ll 1$ , то есть для размерности пространства  $d$ , близкой к  $d = 4$ .

Исследуем теперь критические индексы, введенные нами в лекции 2. Отметим, что приведенные там определения непосредственно обо-

щаются на пространство произвольной размерности  $d$ . Также в произвольной размерности справедливы все приведенные в лекции 2 соотношения между индексами, за исключением следующих

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad B \sim T/r_c^{d-2}.$$

В лекции 2 эти соотношения записаны для размерности пространства  $d = 3$ .

Найдем критические индексы в главном приближении по  $\epsilon$ . Напомним определение индексов  $\alpha$  и  $\nu$ :

$$C_{sing} \propto |T - T_c|^{-\alpha}, \quad r_c \propto |T - T_c|^{-\nu}, \quad (4.35)$$

где  $C_{sing}$  – сингулярный вклад в теплоемкость, а  $r_c$  – критический радиус. Величину  $r_c$  можно найти, если сравнить два члена второго порядка в (4.1), то есть потребовать  $br_c^{-2} \sim a$ , где коэффициенты должны быть взяты при  $\Lambda' \sim r_c^{-1}$ . В первом приближении по  $\epsilon$  фактор  $b$  может считаться константой, и мы получаем из (4.34) в первом по  $\epsilon$  приближении

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{4} \frac{n+2}{n+8}. \quad (4.36)$$

Чтобы найти критический индекс  $\alpha$ , мы должны использовать модификацию соотношения (4.23):

$$\frac{dF}{d\xi} \propto a^2 (\Lambda')^{-\epsilon}. \quad (4.37)$$

Подставляя сюда (4.34) и интегрируя по  $\xi$  до  $\Lambda' \sim r_c^{-1}$ , мы находим сингулярный вклад в свободную энергию

$$F_{sing} \propto (T - T_c)^2 r_c^{(4-n)\epsilon/(n+8)}.$$

Беря теперь вторую производную по  $T$  и используя (4.36), мы находим

$$\alpha = \frac{4-n}{2(n+8)} \epsilon. \quad (4.38)$$

Разумеется, найденные значения удовлетворяют общему соотношению  $\alpha = 2 - d\nu$  с точностью до первого порядка по  $\epsilon$ .

Далее, мы можем найти критический индекс  $\gamma$ , введенный соотношением (2.38). Подставляя однородное  $h$  в формулу (2.37) и учитывая, что интеграл по  $\mathbf{r}$  в получившемся выражении садится на  $r \sim r_c$ , мы получаем, учитывая соотношения (4.35, 4.36)

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \epsilon. \quad (4.39)$$

После этого из соотношения  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ , установленного в лекции 2, можно найти индекс  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)}\epsilon.$$

Напомним, что мы ввели в лекции 2 индекс  $\eta$  (аномальный индекс парной корреляционной функции параметра порядка), который определяется следующим образом:

$$G^{-1}(q) \propto q^{2-\eta}, \quad (4.40)$$

где  $qr_c \gg 1$ . Определение (4.40) можно переписать следующим образом:  $b \propto q^{-\eta}$ . Индекс  $\eta$  можно найти из уравнения (4.31), если подставить туда  $g = \epsilon$ . Решая это уравнение и подставляя туда  $\Lambda' = q$ , мы находим

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2}\epsilon^2. \quad (4.41)$$

Этот индекс возникает только во втором порядке по  $\epsilon$ .

Таким образом, мы приходим к утверждению о скейлинге, который имеет место в пространстве размерности  $d = 4 - \epsilon$  при любом ненулевом  $\epsilon$ . В принципе можно расширить приведенную схему, вычислив члены более высокого порядка по  $\epsilon$  в выражениях для критических индексов. Затем можно попытаться экстраполировать полученные выражения на случай  $\epsilon = 1$ . Конечно, разложение по  $\epsilon$  является асимптотическим, а само значение  $\epsilon = 1$  не является малым. Поэтому, вообще говоря, ожидать большого успеха на этом пути не приходится. Тем не менее, сравнение с экспериментом показывает, что критические индексы, вычисленные во втором приближении по  $\epsilon$ , неплохо соответствуют наблюдаемым. (Выражения для всех критических индексов во втором приближении по  $\epsilon$  можно найти, например, в книге [14].)

## Задачи

### Задача 4.1

Найти длинноволновое поведение факторов  $\lambda$  и  $\lambda_1$ , фигурирующих в функционале Ландау

$$\int d^4r \left\{ \frac{b}{2}(\nabla\varphi_1)^2 + \frac{b}{2}(\nabla\varphi_2)^2 + \frac{\lambda}{24}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 + \frac{\lambda_1}{24}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \right\}, \quad (4.42)$$

в пространстве размерности  $d = 4$ .

### Решение задачи 4.1

Производя выделения быстрых компонент полей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , как это описано в тексте лекции, и производя по ним интегрирование, мы находим следующие ренорм-групповые уравнения

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = -\frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \left( \frac{5}{3}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_1^2 \right), \quad (4.43)$$

$$\frac{d\lambda_1}{d\xi} = -\frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} (2\lambda\lambda_1 + \lambda_1^2). \quad (4.44)$$

Асимптотически при  $\xi \rightarrow \infty$  фактор  $\lambda_1$  становится много меньше  $\lambda$ . В этом пределе мы возвращаемся к замкнутому РГ-уравнению на  $\lambda$ , получающемуся из (4.43), которое приводит к тому же поведению  $g \approx \xi^{-1}$  для инвариантного заряда

$$g = \frac{5}{3} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda.$$

В том же пределе РГ-уравнение (4.44) приводит к линейному уравнению на  $\lambda_1$ , решение которого с учетом  $g \approx \xi^{-1}$  имеет вид  $\lambda_1 \propto g^{6/5} \propto \xi^{-6/5}$ . Этот закон показывает, что  $\lambda_1$  действительно стремится к нулю быстрее, чем  $\lambda$ . Обратим внимание на тот замечательный факт, что в пределе  $\xi \rightarrow \infty$  повышается симметрия функционала Ландау (4.42), так как в пренебрежение членом с  $\lambda_1$  он становится инвариантным относительно вращений в пространстве  $\varphi_1, \varphi_2$ .

#### Задача 4.2

Найти длинноволновое поведение в точке фазового перехода факторов  $\lambda_{2n}$ , фигурирующих в функционале Ландау  $\mathcal{F}_{bas} + \mathcal{F}_{high}$ , где

$$\mathcal{F}_{bas} = \int d^4r \left\{ \frac{b}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{\lambda}{24} (\varphi^2)^2 \right\}, \quad (4.45)$$

$$\mathcal{F}_{high} = \int d^4r \sum_{n>2} \frac{1}{(2n)!} \lambda_{2n} \varphi^{2n}, \quad (4.46)$$

определенном для однокомпонентного параметра порядка в пространстве размерности  $d = 4$ .

#### Решение задачи 4.2

Как будет видно из ответа, факторы  $\lambda_{2n}$  ренормируются логарифмически. Поэтому они не производят существенных (релевантных) членов в РГ-уравнении на  $\lambda$ , и мы по-прежнему остаемся с поведением  $g \approx \xi^{-1}$  для инвариантного заряда

$$g = \frac{3}{2} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b^2} \lambda,$$

как это определяется (4.45). Переходим к анализу фактора  $\lambda_6$  (коэффициента при  $\varphi^6$ ). РГ-уравнение для этой величины содержит в правой части единственный член, который получается спариванием с членом четвертого порядка:

$$\frac{d\lambda_6}{d\xi} = -5g\lambda_6. \quad (4.47)$$

Отсюда следует  $\lambda_6 \propto \xi^{-5}$  на больших  $\xi$ . Далее, РГ-уравнение для  $\lambda_8$  содержит уже два члена:

$$\frac{d\lambda_8}{d\xi} = -\frac{28}{3}g\lambda_8 - \frac{35}{2} \frac{S_4}{(2\pi)^4} \frac{T}{b} \lambda_6^2. \quad (4.48)$$

В соответствии с этим уравнением в  $\lambda_8$  имеется два вклада: однородный, который возникает из ренормировки затравочного значения  $\lambda_8$ , и неоднородный, который навязывается вторым членом в правой части (4.48). Однородный член пропорционален  $\xi^{-28/3}$ , а неоднородный пропорционален  $\xi^{-9}$ . Таким образом, именно последний выживает в длинноволновом пределе. РГ-уравнение для фактора  $\lambda_{2n}$  при  $n > 4$  записывается в следующем виде

$$\frac{d\lambda_{2n}}{d\xi} = -\frac{1}{3}n(2n-1)g\lambda_{2n} + \dots, \quad (4.49)$$

где точки означают сумму членов, пропорциональных парным произведениям  $\lambda_{2m}\lambda_{2n-2m+4}$ , что обобщает структуру правой части (4.48). Эти члены производят неоднородный вклад в  $\lambda_{2n}$ , который превалирует в длинноволновом пределе. Поэтому мы получаем закон  $\lambda_{2n} \propto \xi^{7-4n}$  для всех факторов из (4.46). Отметим, что этот закон пропорциональности действует, начиная даже с  $n = 2$ , то есть начиная с  $\lambda$ , и далее для всех  $\lambda_{2n}$ .

## Лекция 5

# Слабая кристаллизация

Как известно, кристаллизация (переход из жидкого в твердое состояние) является обычно фазовым переходом первого рода. Тем не менее, возможна ситуация, когда кристаллизация близка к непрерывному фазовому переходу (переходу второго рода). Мы будем называть этот случай слабой кристаллизацией. Слабая кристаллизация весьма редко наблюдается в простых жидкостях, поскольку для ее реализации требуется выполнение ряда условий (которые мы обсуждаем ниже). В то же время слабая кристаллизация – обычное явление в жидкокристаллическом состоянии, когда речь идет о кристаллизации анизотропной жидкости (нематика) или о кристаллизации фазы с одномерной модуляцией плотности (смектика).

В окрестности слабо-кристаллизационного фазового перехода вещество обладает рядом особенностей, напоминающих поведение вещества вблизи точки фазового перехода второго рода. В то же время флуктуационные эффекты в этих двух случаях имеют весьма разные свойства. Поэтому следует отдельно изучить слабую кристаллизацию. Мы сосредоточимся на теории слабой кристаллизации изотропной жидкости. Несмотря на то, что эта задача является модельной, она представляет несомненный методический интерес. Дело в том, что вся развитая для этого случая теоретическая схема без особых изменений переносится и на случай слабой кристаллизации в жидких кристаллах, где она встречается сплошь и рядом. Обзор теории слабой кристаллизации можно найти в [27].

## 5.1 Функционал Ландау

Теория слабой кристаллизации может быть построена в духе теории фазовых переходов Ландау. Поэтому в первую очередь следует ввести параметр порядка, связанный с этим переходом. В данном случае роль параметра порядка играет следующая величина:

$$\varphi = \rho_{short}/\rho. \quad (5.1)$$

Здесь  $\rho$  – длинноволновая компонента плотности, а  $\rho_{short}$  – ее коротковолновая компонента. По определению, поле  $\varphi$  содержит Фурье-компоненты с волновыми векторами по порядку величины равными обратному молекулярному размеру. В жидкой фазе среднее  $\langle\varphi\rangle$  равно нулю, в то время как в кристаллической фазе возникает ненулевое среднее  $\langle\varphi\rangle$ , соответствующее периодической модуляции плотности с периодом кристаллической решетки. Таким образом, поле  $\varphi$  действительно ведет себя, как параметр порядка.

Из определения (5.1) следует, что среднее значение  $\langle\varphi\rangle$  определяет относительную глубину модуляции коротковолновой плотности массы в кристалле. Обычной (сильной) кристаллизации соответствует возникновение  $\langle\varphi\rangle \sim 1$ . Среднее же, которое возникает вблизи слабокристаллизационного фазового перехода, должно быть малым:

$$\langle\varphi\rangle \ll 1. \quad (5.2)$$

При этом условии оказываются малыми (но не слабыми!) и флуктуации  $\varphi$ .

Как и при исследовании фазовых переходов второго рода, при теоретическом исследовании слабой кристаллизации следует стартовать с функционала Ландау  $\mathcal{F}_L(\varphi)$ . Мы, как и раньше, будем удерживать только несколько первых членов разложения, что оправдывается неравенством (5.2). Первые члены разложения  $\mathcal{F}$  по  $\varphi$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{V} = & \sum_{\mathbf{q}} \frac{\varpi(\mathbf{q})}{2} \varphi(\mathbf{q})\varphi(-\mathbf{q}) - \sum_{\mathbf{q}} \frac{\mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{6} \varphi(\mathbf{q}_1)\varphi(\mathbf{q}_2)\varphi(\mathbf{q}_3) \\ & + \sum_{\mathbf{q}} \frac{\lambda(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)}{24} \varphi(\mathbf{q}_1)\varphi(\mathbf{q}_2)\varphi(\mathbf{q}_3)\varphi(\mathbf{q}_4), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $V$  – объем системы, и суммирование во втором и третьем члене идет по волновым векторам, подчиненным условиям  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$  и  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4 = 0$ , соответственно. Линейный по  $\varphi$  член в разложении (5.3) отсутствует, так как  $\varphi$  является коротко-волновым полем, которое не содержит нулевой Фурье-гармоники.



Так как поле  $\varphi$  является коротко-волновым, то коэффициенты разложения функционала Ландау  $\mathcal{F}$  по  $\varphi$  существенно зависят от волновых векторов поля  $\varphi$ . Коэффициент  $\varpi$  в (5.3) является функцией абсолютного значения  $q$  волнового вектора  $\mathbf{q}$ . Мы будем рассматривать случай, когда  $\varpi(q)$  достигает минимума на некоторой сфере радиуса  $q_0$  в обратном пространстве. При исследовании флуктуаций  $\varphi$  с волновыми векторами вблизи этой сферы можно разложить функцию  $\varpi(q)$  в ряд вблизи минимума, что дает

$$\varpi(q) = a + b(q - q_0)^2. \quad (5.4)$$

Здесь коэффициенты  $a$  и  $b$  уже не содержат какой-либо зависимости от  $q$ . Заметим, что  $a = \varpi(q_0)$ .

Разложение (5.4) оправдано, если для характерного волнового вектора флуктуаций  $\varphi$  выполнено условие

$$|q - q_0| \ll q_0. \quad (5.5)$$

В дальнейшем мы будем предполагать условие (5.5) выполненным (соответствующий критерий будет приведен ниже). С учетом неравенства (5.5)  $(q - q_0)^2 \approx (q^2 - q_0^2)/(4q_0^2)$ . Подставляя это соотношение в (5.4), мы можем затем переписать член второго порядка в разложении функционала Ландау (5.3) в следующем “локальном” виде

$$\mathcal{F}_{(2)} = \int d^3r \left\{ \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{b}{8q_0^2} [(\nabla^2 + q_0^2)\varphi]^2 \right\}. \quad (5.6)$$

При условии (5.5) коэффициент  $\mu$  в (5.3) может считаться константой, так как единственной возможностью для трех волновых векторов в аргументе  $\mu$  в силу  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$  и  $|\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2| = |\mathbf{q}_3| = q_0$  является их расположение вдоль ребер правильного треугольника. Такое расположение не имеет степеней свободы, от которых может зависеть  $\mu$ . Предположим также, что выполняется условие  $\lambda = \text{const}$ . Это позволит далеко продвинуться аналитически в исследовании слабой кристаллизации, а также установить ее основные качественные особенности, имеющие место и при произвольной зависимости  $\lambda$  от волновых векторов. При этих условиях ( $\lambda = \text{const}$  и  $\mu = \text{const}$ ) члены третьего и четвертого порядка в функционале Ландау (5.3) приобретают следующую локальную форму

$$\mathcal{F}_{int} = \int d^3r \left( -\frac{\mu}{6} \varphi^3 + \frac{\lambda}{24} \varphi^4 \right). \quad (5.7)$$

Фазовый переход, связанный с появлением  $\langle \varphi \rangle$ , имеет место при уменьшении параметра  $a$  в (5.6). Из-за наличия кубического члена в

разложении (5.7) этот переход является переходом первого рода [8]. Таким образом, для слабости кристаллизационного перехода необходимо, чтобы коэффициент  $\mu$  в разложении (5.7) был достаточно мал. Это и дает дополнительное условие, при котором слабая кристаллизация может быть реализована. Поэтому можно ожидать, что слабая кристаллизация будет реализовываться в окрестности изолированной точки на  $P - T$  диаграмме системы, определяемой условиями  $a = 0$  и  $\mu = 0$ . В этом смысле имеется аналогия с критической или трикритической точками (окрестность последней изучена в лекции 3), которые задаются двумя условиями.

Параметр  $a$ , введенный (5.4), меняет свой знак в окрестности точки перехода. Следовательно в том случае, когда фазовый переход имеет место при изменении температуры, для этого параметра можно использовать следующее выражение

$$a = \alpha(T - T_*). \quad (5.8)$$

Здесь  $\alpha$  – некоторая константа, а  $T_*$  – температура, при которой параметр  $a$  обращается в ноль. Так как рассматриваемый переход является переходом первого рода, то  $T_*$  не совпадает с температурой кристаллизации, хотя и близка к ней (для слабо-кристаллизационного перехода).

Вообще говоря, среднее  $\langle \varphi \rangle$  содержит бесконечный набор Фурье-гармоник. Однако при условии (5.2) среди этого бесконечного числа можно выделить конечный набор основных (ведущих) гармоник, которые будут иметь амплитуду, намного превышающую амплитуды остальных гармоник. В дальнейшем мы будем удерживать в  $\langle \varphi \rangle$  только эти ведущие гармоники:

$$\langle \varphi \rangle = 2\text{Re} \sum_j c_j \exp(i\mathbf{q}_j \mathbf{r}). \quad (5.9)$$

Здесь  $c_j$  – (комплексные) коэффициенты, а  $\mathbf{q}_j$  – набор волновых векторов, характеризующих основные гармоники. По абсолютной величине  $\mathbf{q}_j$  близки к  $q_0$ , что также является следствием слабости кристаллизационного перехода. Действительно, в силу (5.4) вклад второго порядка в (5.3) достигает минимума при  $|\mathbf{q}_j| = q_0$ , и это условие слабо нарушается за счет высших членов разложения  $\mathcal{F}$  из-за малости  $\varphi$ . В дальнейшем мы пренебрегаем отличием  $|\mathbf{q}_j|$  от  $q_0$ .

При слабокристаллизационном переходе могут возникать разнообразные низкотемпературные фазы. Их естественно классифицировать в рамках представлений точечных групп симметрии. Если низкотемпературная фаза обладает той или иной симметрией, то среднее  $\langle \varphi \rangle$  не должно меняться при преобразованиях этой группы. Другими словами, набор  $\mathbf{q}_j$  должен оставаться неизменным, а коэффициенты  $c_j$

должны переходить друг в друга. Поэтому естественно ожидать, что их абсолютные значения равны между собой. Именно такой случай имеется в виду далее.

Приведем примеры фаз, которые могут возникать в результате слабобокристаллизационного фазового перехода (точнее, каскада таких переходов). В простейшем случае в наборе  $\mathbf{q}_j$  имеется только один вектор, и, соответственно, имеется только одно слагаемое в (5.9). Это означает, что возникает одномерная (в одном направлении) модуляция плотности:

$$\langle \varphi \rangle = 2\sqrt{A} \cos(\phi + q_0 z). \quad (5.10)$$

Здесь ось  $Z$  выбрана вдоль направления модуляции плотности, а  $A$  и  $\phi$  определяют амплитуду и фазу модуляции плотности. Фаза с такой модуляцией называется смектической, точнее, эта модуляция соответствует смектику-А (мы будем обозначать такую фазу SA). Смектические фазы часто встречаются в жидкокристаллическом состоянии. Следующей по сложности является фаза, когда набор  $\mathbf{q}_j$  состоит из трех векторов, составляющих правильный треугольник. В этом случае возникает двумерная модуляция плотности, точечная симметрия которой определяется осью шестого порядка (перпендикулярной к плоскости, в которой лежат  $\mathbf{q}_j$ ). Мы будем обозначать эту фазу  $D_h$ . Фазы такой симметрии часто возникают в жидкокристаллическом состоянии, где они называются колончатыми, так как состоят из колонок дискообразных молекул. Простой кубической фазе соответствует набор трех волновых векторов  $\mathbf{q}_j$ , направленных вдоль ребер куба. Объемноцентрированной кубической фазе (ВСС) соответствует набор шести  $\mathbf{q}_j$ , являющихся диагоналями некоторого куба. Возможны и более сложные кристаллические структуры. Кроме того, следует принимать во внимание и квазикристаллические фазы, не имеющие строгой периодической структуры. Например, такой фазе соответствует набор  $\mathbf{q}_j$ , составляющих ребра икосаэдра (такого сорта симметрия наблюдается у некоторых веществ экспериментально). Можно представить себе и более простую неперIODическую структуру, скажем, набор  $\mathbf{q}_j$ , составляющих правильный пятиугольник.

В принципе, надо перебрать все возможные точечные симметрии, вычислить соответствующие им значения свободной энергии и найти ее абсолютный минимум. Такая задача никем не решена, поскольку она требует перебора бесконечного количества вариантов. Тем не менее, можно достаточно уверенно предсказать характер фазовой диаграммы системы, исходя из полуколичественных соображений, основанных на анализе функционала Ландау и флуктуационных эффектов.

Изучим сначала слабую кристаллизацию в приближении среднего

поля. Тогда мы должны найти минимум функционала Ландау по  $\varphi$ , который и определит среднее значение параметра порядка  $\langle \varphi \rangle$ . Ясно, что при условиях  $\mu = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$  минимум функционала Ландау относительно вариаций волновых векторов достигается при волновых векторах  $q = q_0$ , то есть только такие основные гармоники содержатся в среднем  $\langle \varphi \rangle$ .

Рассмотрим сначала члены второго и четвертого порядков в (5.3). Подставим туда выражение (5.9), считая (в соответствии со сказанным выше), что все  $c_j$  имеют одинаковую абсолютную величину  $\sqrt{A}$ . Тогда мы находим

$$\mathcal{F}/V = aNA + \frac{\lambda}{2}(N^2 - N/2)A^2, \quad (5.11)$$

где  $N$  – число слагаемых в (5.9). При выводе (5.11) мы предполагали, что среди волновых векторов  $\mathbf{q}_j$  нет четверок, из которых можно составить четырехугольник (иначе в функционале Ландау  $\mathcal{F}$  появились бы дополнительные члены). Среди перечисленных фаз ни одна не обладает такими четверками, поэтому ниже мы игнорируем такую возможность. Минимизируя (5.11) по  $A$ , мы получаем (при условии, что  $a < 0$ )  $\mathcal{F}/V = -a^2N/[\lambda(2N - 1)]$ . Очевидно, что для целых  $N$  минимум этого выражения достигается при  $N = 1$ . Поэтому при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях  $a$  всегда реализуется смектическая (SA) фаза, где в наборе  $\mathbf{q}_j$  имеется единственный вектор.

При умеренных  $a$  вступает в игру кубический член в (5.3), который стремится плодить тройки векторов, составляющих правильные треугольники (так как только на таких конфигурациях этот член третьего порядка отличен от нуля). В результате компромисса между двумя этими тенденциями при повышении температуры возникает каскад фазовых переходов (при  $\mu = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$ )

$$SA - D_h - BCC - I, \quad (5.12)$$

где  $I$  означает изотропную (жидкую) фазу. Для обеих промежуточных фаз ( $D_h$  и  $BCC$ ) наборы  $\mathbf{q}_j$  содержат тройки, составляющие замкнутые треугольники. Довольно много таких троек и в наборе  $\mathbf{q}_j$ , направленных вдоль ребер икосаэдра. Но в случае  $\lambda = \text{const}$  энергия соответствующей квазикристаллической фазы всегда оказывается выше, чем энергии фаз, перечисленных в (5.12). Не исключено, впрочем, что икосаэдрическая фаза реализуется на фазовой диаграмме системы в случае более сложной зависимости  $\lambda$  от волновых векторов.

## 5.2 Флуктуационные эффекты

Теперь мы переходим к исследованию флуктуаций параметра порядка, функция распределения вероятности которого определяется, как и раньше, выражением (1.3). Отметим, что, скажем, неприводимая парная корреляционная функция параметра порядка

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \rangle - \langle \varphi(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \varphi(\mathbf{r}_2) \rangle \quad (5.13)$$

в низкотемпературной фазе (фазах) зависит, вообще говоря, не только от разности координат  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , но от обоих аргументов. Дело в том, что такая фаза в силу зависимости  $\langle \varphi \rangle$  от координат является неоднородной. Поэтому и в Фурье-представлении парная корреляционная функция зависит от двух волновых векторов. То же справедливо и для корреляционных функций произвольного порядка: в силу неоднородности системы они зависят от всех своих аргументов.

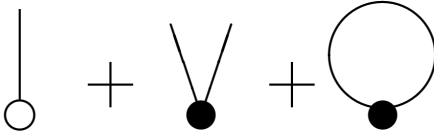
Как и в лекции 2, для корреляционных функций параметра порядка можно сформулировать теорию возмущений. В ряду теории возмущений будут теперь фигурировать член третьего и четвертого порядка, приведенные в (5.3) или (5.7). Соответственно, в диаграммном ряду будут фигурировать вершины третьего порядка (которым сопоставляется фактор  $\mu$ ) и вершины четвертого порядка (которым сопоставляется фактор  $\lambda$ ). Затравочные значения корреляционных функций определяются членом второго порядка (5.6). Как и раньше, в диаграммном ряду для корреляционной функции (5.13) можно выделить “собственно-энергетические” блоки (которые нельзя разрезать по одной линии), которые собираются в “собственно-энергетическую” функцию  $\Sigma$ . Поскольку функция  $G$  зависит от обоих аргументов, то связь между  $G$  и  $\Sigma$  удобнее выписать в  $\mathbf{r}$ -представлении:

$$\begin{aligned} & \left[ a + b (\nabla^2 + q_0^2)^2 / 4q_0^2 \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \\ & - \int d^3 r_2 \Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = T \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где явный вид дифференциального оператора может быть извлечен из (5.6).

Затравочное значение  $G_0$  корреляционной функции (5.13) получается, если положить в (5.14)  $\Sigma = 0$ . Ясно, что  $G_0$  зависит только от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ . В Фурье-представлении выражение для затравочной функции  $G_0$  имеет вид

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{T}{a + b(q - q_0)^2}. \quad (5.15)$$

Рис. 5.1: Однопетлевой вклад в  $\Sigma$ .

Здесь мы опять использовали неравенство (5.5). Отметим, что в  $\mathbf{r}$ -представлении функция  $G_0$  является быстро осциллирующей функцией  $r$ :

$$G_0(\mathbf{r}) = \frac{Tq_0}{2\pi r\sqrt{ab}} \sin(q_0 r) \exp\left(-\sqrt{\frac{a}{b}} r\right). \quad (5.16)$$

При вычислении (5.16) мы считали, что интеграл по  $\mathbf{q}$  определяется узкой окрестностью сферы  $q = q_0$ .

Оказывается, в теории слабой кристаллизации главным приближением для  $\Sigma$  является однопетлевое (на диаграммном языке) [28]. В этом приближении  $\Sigma$  определяется суммой диаграмм, представленных на рисунке 5.1. На этом рисунке пустой круг (тройная вершина) соответствует фактору  $\mu$ , а заполненный круг (четверная вершина) – фактору  $\lambda$ . Петля на этом рисунке соответствуют парной корреляционной функции (5.13), а линии со свободными концами соответствуют среднему  $\langle\varphi\rangle$ . Приведенное диаграммное представление легко может быть переписано аналитически для случая  $\lambda = \text{const}$ . Принимая во внимание, что также  $\mu = \text{const}$ , мы находим

$$\Sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \left[ \mu \langle\varphi(\mathbf{r})\rangle - \frac{\lambda}{2} \langle\varphi(\mathbf{r})\rangle^2 - \frac{\lambda}{2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (5.17)$$

Введем обозначение  $\Delta$  для следующей комбинации

$$\Delta = a + \lambda \overline{\langle\varphi(\mathbf{r})\rangle^2} / 2 + \lambda \overline{G(\mathbf{r}, \mathbf{r})} / 2, \quad (5.18)$$

где линия над функцией координат означает пространственное среднее. Другими словами, линия над функцией означает, что в ней надо оставить только нулевую Фурье-гармонику, а остальные отбросить. Подставляя (5.18) в соотношение (5.14), мы находим

$$\left[ \Delta + \frac{b}{4q_0^2} (\nabla^2 + q_0^2)^2 - \Theta(\mathbf{r}) \right] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = T \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \quad (5.19)$$

Здесь  $\Theta$  означает совокупность членов, дающих ноль при пространственном усреднении:  $\overline{\Theta(\mathbf{r})} = 0$ . Пренебрежем сначала членом с  $\Theta$  в

(5.19). В этом приближении функция  $G$  зависит только от разности координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ . Тогда в Фурье-представлении мы находим

$$G(\mathbf{q}) = \frac{T}{\Delta + b(q - q_0)^2} \quad . \quad (5.20)$$

Это выражение отличается от (5.15) заменой  $a \rightarrow \Delta$ . Мы будем называть величину  $\Delta$  щелью, что оправдывается формой функции (5.20).

Вычислим теперь одноточечную корреляционную функцию  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ , входящую в уравнение (5.17):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G(\mathbf{q}) = Tq_0^2/2\pi(b\Delta)^{1/2}. \quad (5.21)$$

Здесь мы, используя неравенство (5.5), ограничились интегрированием по окрестности сферы  $|\mathbf{q}| = q_0$  в обратном пространстве. Подставляя выражение (5.21) в (5.18), мы получаем следующее уравнение для щели

$$\Delta = a + \lambda \overline{\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle^2} / 2 + \beta \Delta^{-1/2}, \quad (5.22)$$

где

$$\beta = \lambda T q_0^2 / 4\pi b^{1/2} \quad . \quad (5.23)$$

Первые два члена в правой части (5.22) являются среднеполевыми вкладами, в то время как последний член возникает благодаря флуктуациям.

Используя (5.20), мы можем оценить характерное отклонение  $q$  от  $q_0$  в интеграле (5.21):

$$|q - q_0| \sim (\Delta/b)^{1/2} \quad . \quad (5.24)$$

Следовательно для того, чтобы условие (5.5) выполнялось, необходимо выполнение неравенства

$$\Delta \ll b q_0^2. \quad (5.25)$$

Оценивая теперь связанные с членом  $\Theta$  в (5.19) поправки, мы убеждаемся, что они малы по параметру  $\Delta/(b q_0^2)$ . Поэтому член с  $\Theta$  в (5.19) можно отбросить.

Заметим, что для жидкой (изотропной) фазы, где  $\langle \varphi \rangle = 0$ , соотношение (5.22) является замкнутым уравнением для щели  $\Delta$ :  $\Delta = a + \beta \Delta^{-1/2}$ . В отличие от того, что имеет место для фазовых переходов второго рода, при  $a \rightarrow 0$  решение этого уравнения остается конечным, давая значение порядка

$$\Delta \sim (\lambda^2 T^2 q_0^4 / b)^{1/3}. \quad (5.26)$$

Более того, уравнение на щель  $\Delta$  имеет решение для произвольного отрицательного значения  $a$ . Другими словами, флуктуационные эффекты оказываются столь сильными, что они стабилизируют жидкую фазу (точнее, делают ее метастабильной) даже при  $a < 0$ . Столь существенная роль флуктуаций связана с их большим фазовым объемом, который включает в себя окрестность целой сферы  $q = q_0$  в обратном пространстве. Для сравнения, фазовый объем флуктуаций параметра порядка вблизи перехода второго рода определяется узкой окрестностью начала координат в обратном пространстве.

Парадоксальным образом, в рамках теории слабой кристаллизации большая сила флуктуаций сочетается с простым однопетлевым приближением (что значительно облегчает анализ). Причина этого заключается в том, что в многопетлевых диаграммах невозможно обеспечить близость всех волновых векторов к  $q_0$ . Поэтому имеется только малая область, когда все  $\mathbf{q}_j$  по абсолютной величине близки к  $q_0$ , и потому при интегрировании по  $\mathbf{q}_j$  многопетлевая диаграмма приобретает по сравнению с соответствующей однопетлевой диаграммой малость, которая определяется некоторой степенью малого параметра  $\Delta/(bq_0^2)$ . Подчеркнем, что это свойство связано именно с коротковолновым характером флуктуаций  $\varphi$ , волновые вектора которых близки к  $q_0$  (для обычных фазовых переходов второго рода никакого аналога этого свойства нет).

### 5.3 Фазовая диаграмма

Как мы уже объяснили, при понижении температуры могут возникать различные по симметрии фазы. Чтобы определить, какая из фаз реализуется при данных значениях  $a$  и  $\mu$ , необходимо вычислить их свободные энергии и найти наименьшую из них. Оказывается, в рамках теории слабой кристаллизации (с учетом флуктуаций) удобнее иметь дело не с самими значениями свободной энергии, а с разностями значений свободной энергии для различных фаз. Поскольку изотропная (жидкая) фаза существует при произвольных значениях  $a$  и  $\mu$ , то ее можно использовать, как реперную, то есть отсчитывать от ее энергии значения энергии всех остальных фаз.

Чтобы сравнивать между собой энергии различных фаз, мы должны стартовать с определения свободной энергии

$$\exp\left(-\frac{F}{T}\right) = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{\mathcal{F}}{T}\right). \quad (5.27)$$

Это соотношение справедливо для любой фазы. Более того, можно зафиксировать произвольное среднее  $\langle\varphi\rangle$  и найти соответствующую



этому среднему свободную энергию. А затем можно найти разность энергий различных фаз, постепенно трансформируя  $\langle\varphi\rangle$ . Это соответствует эволюции состояния системы, вызванной изменением (коротковолнового) “внешнего поля”  $h$  (тогда в функционал Ландау следует добавить член  $-\int d^3r h\varphi$ ), причем  $h = 0$  в начале и в конце процесса (так как начальное и конечное состояния соответствуют локальным минимумам свободной энергии).

Чтобы выполнить эту программу, мы подставляем декомпозицию  $\varphi = \langle\varphi\rangle + \tilde{\varphi}$  (где  $\tilde{\varphi}$  описывает флуктуации параметра порядка около среднего значения) в (5.7,5.6) и находим, удерживая в  $\mathcal{F} - \int d^3r h\varphi$  только существенные члены (второго порядка по  $\tilde{\varphi}$ ), вклад

$$\mathcal{F}(\langle\varphi\rangle) + \int d^3r \left\{ \frac{a}{2}\tilde{\varphi}^2 + \frac{b}{8q_0^2} [(\nabla^2 + q_0^2)\tilde{\varphi}]^2 + \frac{\lambda}{2}NA\tilde{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{24}\tilde{\varphi}^4 \right\}, \quad (5.28)$$

соответствующий однопетлевому приближению. Здесь мы считаем, что среднее задается суммой (5.9), в которой имеются  $N$  слагаемых и где все  $c_j$  совпадают по абсолютной величине:  $|c_j|^2 = A$ . Тогда вклад  $\mathcal{F}(\langle\varphi\rangle)$ , который определяется средним значением  $\varphi$ , является функцией  $A$ . Эта функция определяется (5.11) (при тех же предположениях, то есть если среди волновых векторов  $\mathbf{q}_j$  нет четверок, из которых можно составить четырехугольник).

Теперь мы можем получить из (5.28) выражение для парной корреляционной функции флуктуаций  $\tilde{\varphi}$ , которая в главном приближении совпадает с (5.20), где щель  $\Delta$  удовлетворяет уравнению (5.22). Подставляя в это уравнение (5.9) и производя усреднение по пространству, мы находим

$$\Delta = a + \lambda NA + \beta\Delta^{-1/2}. \quad (5.29)$$

Далее, можно найти выражение для  $dF/dA$ , беря производную от соотношения (5.27):

$$\frac{dF}{dA} = \frac{d}{dA}\mathcal{F}(\langle\varphi\rangle) + \frac{N\beta}{\sqrt{\Delta}}V, \quad (5.30)$$

где мы подставили выражение для  $\langle(\tilde{\varphi})^2\rangle$  следующее из (5.20).

Разумеется, для стабильной (или, более точно, метастабильной фазы) производная  $dF/dA$  должна быть равна нулю в силу того, что такая фаза соответствует локальному минимуму  $F$ . Поэтому для метастабильных фаз мы находим из (5.30) следующее условие

$$aN + \lambda(N^2 - N/2)A + \frac{\beta N}{\sqrt{\Delta}} = 0, \quad (5.31)$$

связывающее амплитуду  $A$  со значением щели  $\Delta$ . Уравнение (5.31) вместе с (5.29) определяют величины  $A$  и  $\Delta$  для данной фазы.

Наряду с этим, выражение (5.30) формально определяет производную  $dF/dA$  для произвольного  $A$  и, следовательно, мы можем найти разность энергий данной фазы и жидкой фазы (где  $A = 0$ ) в виде следующего интеграла

$$F - F_{\text{liq}} = \mathcal{F}(\langle\varphi\rangle) + \int_0^A dA \frac{\beta N}{\sqrt{\Delta}}. \quad (5.32)$$

При этом подразумевается, что щель  $\Delta$  связана с  $A$  соотношением (5.29). Выражая из него  $dA$  через  $d\Delta$  и подставляя результат в (5.32), мы получаем

$$F - F_{\text{liq}} = \mathcal{F}(\langle\varphi\rangle) + \frac{2\beta}{\lambda}(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta_0}) - \frac{\beta^2}{2\lambda}(\Delta^{-1} - \Delta_0^{-1}), \quad (5.33)$$

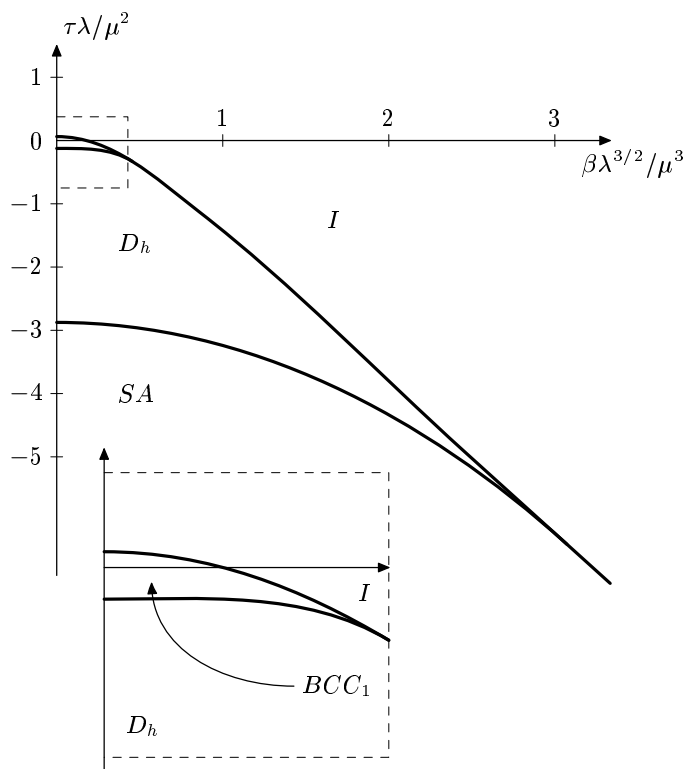
где индекс 0 относится к величине щели в жидкой фазе. Затем, используя (5.33), можно найти разность энергий для двух произвольных фаз.

Поскольку стабильная фаза соответствует абсолютному минимуму свободной энергии, фазовый переход происходит тогда, когда энергия некоторой фазы сравнивается с энергией фазы, которая была до сих пор стабильной. Таким образом, точку фазового перехода можно найти, приравняв нулю разность энергий фаз, найденную в результате описанной выше процедуры. Все фазовые переходы, найденные таким образом, будут фазовыми переходами первого рода. Приведем результаты анализа, основанного на приведенных соображениях. Флуктуации приводят к модификации каскада (5.12), найденного в приближении среднего поля. Фазовая диаграмма, которая получается с учетом флуктуаций, приведена на рисунке 5.2. При малых  $\mu$ ,  $\mu \lesssim (\lambda^5 T^2 q_0^4/b)^{1/6}$ , при изменении  $a$  имеет место прямой переход  $I \rightarrow SA$  из жидкой в смектическую фазу. В соответствии со сказанным выше, этот переход является переходом первого рода при произвольном  $\mu$ , хотя он и приближается у непрерывному в теории среднего поля при  $\mu \rightarrow 0$ . При увеличении  $\mu$  (когда картина постепенно приближается к среднеполевой) на фазовой диаграмме сначала появляется  $D_h$ -фаза, а затем и  $BCC$ -фаза, и тем самым восстанавливается каскад (5.12).

## Задачи

### Задача 5.1

Считая  $\mu = 0$ , найти точку окончания  $a_{\text{max}}$  существования (мета-стабильной) смектической фазы.

Рис. 5.2: Фазовая диаграмма системы при  $\lambda = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ .

**Решение задачи 5.1**

Соотношения (5.22, 5.31) для смектика ( $N = 1$ ) дают

$$\begin{aligned}\Delta &= a + \lambda A + \frac{\beta}{\Delta^{1/2}}, \\ a + \frac{\lambda A}{2} + \frac{\beta}{\Delta^{1/2}} &= 0.\end{aligned}$$

Исключая отсюда  $A$ , мы находим

$$a = -(\Delta + \beta/\sqrt{\Delta}).$$

Выражение в скобках в этом выражении достигает минимума при

$$\Delta = \beta^{2/3}/2^{2/3},$$

как раз и дающему точку окончания существования метастабильной смектической фазы. Соответствующее значение  $a$  равно

$$a_{\max} = -3\beta^{2/3}/2^{2/3}.$$

Можно также найти значение  $A$ , соответствующее точке окончания

$$\lambda A = 2^{1/3}\beta^{2/3}.$$

**Задача 5.2**

Считая  $\mu = 0$ , найти значение  $a$ , при котором происходит фазовый переход жидкость-смектик. Флуктуации  $\varphi$  должны быть приняты во внимание.

**Решение задачи 5.2**

Функционал Ландау для рассматриваемого случая имеет вид

$$\mathcal{F} = \int d^3r \left\{ \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{b}{8q_0^2} [(\nabla^2 + q_0^2)\varphi]^2 + \frac{\lambda}{24} \varphi^4 \right\}. \quad (5.34)$$

$$\langle \varphi \rangle = 2\sqrt{A} \cos(q_0 z). \quad (5.35)$$

Уравнения для щели в жидкой фазе  $\Delta_0$  и в смектической фазе  $\Delta$  имеют вид

$$\Delta_0 = a + \frac{\beta}{\sqrt{\Delta_0}}, \quad (5.36)$$

$$\Delta = a + \lambda A + \frac{\beta}{\sqrt{\Delta}}. \quad (5.37)$$

Условие  $dF/dA = 0$  дает

$$a + \frac{\lambda A}{2} + \frac{\beta}{\sqrt{\Delta}} = 0, \quad (5.38)$$

$$\Delta = -a - \frac{\beta}{\sqrt{\Delta}}, \quad (5.39)$$

где учтено соотношение (5.37). Условие, следующее из равенства энергий фаз

$$F_{\text{sm}} - F_{\text{liq}} = \mathcal{F}(\langle\varphi\rangle) + \frac{2\beta}{\lambda}(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta_0}) - \frac{\beta^2}{2\lambda}(\Delta^{-1} - \Delta_0^{-1}) = 0, \quad (5.40)$$

может быть переписано, как

$$\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta_0} = -3\frac{\beta}{a}. \quad (5.41)$$

Заметим, что в силу  $\mathcal{F}(\langle\varphi\rangle) < 0$  мы находим из (5.40) что  $\Delta > \Delta_0$ . Введем обозначения

$$x = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{\beta^{1/3}}, \quad y = \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^{1/3}}. \quad (5.42)$$

Тогда мы получаем из (5.41)

$$a = -\frac{3\beta^{2/3}}{x+y}. \quad (5.43)$$

Подставляя (5.43) в (5.36,5.39), мы находим

$$x^2 = -\frac{3}{x+y} + \frac{1}{x}, \quad (5.44)$$

$$y^2 = \frac{3}{x+y} - \frac{1}{y}. \quad (5.45)$$

Из системы (5.44,5.45) можно получить соотношение

$$x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 = 0.$$

Оно сводится к квадратному уравнению для  $\xi + \xi^{-1}$  где  $\xi = y/x$ . Беря положительный корень этого квадратного уравнения, мы находим

$$\xi^2 - (\sqrt{3} + 1)\xi + 1 = 0.$$

Вспоминая, что  $\xi > 1$  (так как  $\Delta > \Delta_0$ ) мы получаем

$$\xi = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}. \quad (5.46)$$

Далее, мы получаем из (5.44)

$$(x + y)^3 = (1 + \xi)^2(\xi - 2) = 2^{1/2}3^{3/4}.$$

И, наконец, мы находим из (5.43)

$$a = -3^{3/4}2^{-1/6}\beta^{2/3}. \quad (5.47)$$

## Лекция 6

# Флуктуации в смектиках

Смектические фазы (смектики) широко представлены в жидкокристаллическом состоянии вещества. Напомним, что жидкокристаллическое состояние реализуется в веществах, состоящих из вытянутых или дискообразных молекул, причем смектические фазы возникают на фазовой диаграмме веществ, состоящих из молекул вытянутой формы (как правило, это органические молекулы, построенные из нескольких блоков, последовательно соединенных между собой). Смектики характеризуются одномерной модуляцией плотности, что делает их свойства промежуточными между жидкостями и кристаллами (в последнем случае модуляция плотности является трехмерной). Смектики можно представлять себе, как систему слоев, каждый из которых является двумерной жидкостью. Поэтому слои могут проскальзывать друг относительно друга, так что сдвиговый модуль упругости в смектике отсутствует. В то же время система обладает упругостью по отношению к сжатию в направлении, перпендикулярном к слоям (именно в этом направлении модулирована плотность). Имеются различные смектические фазы, которые отличаются друг от друга симметрией смектических слоев. Мы будем рассматривать простейший случай, когда смектические слои являются изотропными (такие смектики называют смектиками-А).

В силу отсутствия сдвигового модуля смектик довольно легко деформируется при приложении внешней силы. По той же причине в смектике оказываются весьма “мягкими” флуктуации смектических слоев. Точнее, являются мягкими их изгибные флуктуации, поскольку они не связаны со сжатием слоев. Эта мягкость приводит к тому, что даже относительно небольшие изгибные флуктуации, возбуждаемые за счет теплового движения, существенно влияют на макроскопи-

ческие характеристики смектика. Этим смектики сильно отличаются от кристаллов, где длинноволновые упругие флуктуации (звуковые волны), возбуждаемые за счет теплового движения, не влияют существенно на макроскопические свойства вещества. В настоящей лекции мы разберем роль длинноволновых тепловых флуктуаций, связанных с деформацией смектических слоев, в физике смектических фаз. Подчеркнем, что, в отличие от предыдущих лекций, мы не будем здесь предполагать, что система находится вблизи какой-либо точки фазового перехода: наше рассмотрение относится к любой смектической фазе вне зависимости от ее температуры.

## 6.1 Функционал Ландау

Как мы уже отмечали в лекции 5, параметром порядка для перехода из жидкой в смектическую фазу является глубина модуляции плотности (5.1). В смектической фазе флуктуациями модуля параметра порядка можно пренебречь также, как можно пренебречь флуктуациями модуля параметра порядка в низкотемпературной фазе, которая возникает в результате фазового перехода второго рода. Но мы уже знаем, что у многокомпонентного параметра порядка в низкотемпературной фазе остаются мягкие степени свободы (например, угол поворота двухкомпонентного параметра порядка). Точно также в смектической фазе у параметра порядка остаются мягкие степени свободы, которые как раз и связаны с длинноволновыми деформациями системы смектических слоев. Эти деформации, как и в кристалле, следует описывать в терминах смещения  $u$  от равновесного положения. Но в отличие от кристалла, где смещение является вектором, в смектике  $u$  является скаляром, так как смещение смектического слоя можно ввести только в направлении, перпендикулярном этому слою.

В основном состоянии (которое соответствует минимуму свободной энергии) смектические слои параллельны и эквидистантны. Направим ось  $Z$  перпендикулярно равновесным смектическим слоям, тогда  $u$  будет смещением слоев вдоль этой оси. Энергия смектика не может меняться при преобразовании  $u \rightarrow u + \text{const}$  (что соответствует смещению смектика, как целого). Поэтому (как и в кристалле) энергия зависит от градиента  $u$ . В квадратичном приближении главный вклад в упругую энергию смектика имеет вид

$$\mathcal{F}_{el} = \int d^3r \frac{B}{2} (\partial_z u)^2. \quad (6.1)$$

Эта энергия связана с сжатием (растяжением) смектических слоев, то есть  $B$  – модуль сжатия. Модуль сдвига, как мы уже отмечали,



в смектиках отсутствует. Тем не менее, при исследовании проблем, связанных с упругостью смектиков, необходимо принять во внимание вклад в энергию, содержащий производные от  $u$  по  $x, y$ , так как иначе задача будет плохо определена. Основным таким вкладом является член, содержащий большую степень градиента, чем (6.1):

$$\mathcal{F}_K = \int d^3r \frac{K}{2} (\nabla^2 u)^2. \quad (6.2)$$

Здесь  $K$  – еще один модуль упругости. Вклады второго порядка (6.1, 6.2) вместе уже корректно определяют линейную теорию упругости смектика.

Свяжем теперь смещение  $u$  с параметром порядка  $\varphi$  (модуляцией плотности), точнее, с его средним по коротковолновым флуктуациям. Выражение для среднего значения параметра порядка в смектической фазе обсуждалось в лекции 5:  $\langle \varphi \rangle \propto \cos(\phi_0 + q_0 z)$ , где  $\phi_0$  – некоторая константа. Приведенное выражение относится к основному состоянию, в котором энергия достигает минимума. Для деформированного состояния смектика мы можем записать

$$\varphi(\mathbf{r}) = c \cos(\phi), \quad (6.3)$$

где  $c$  и  $\phi$  – некоторые функции  $\mathbf{r}$ . Абсолютная величина параметра порядка на больших масштабах “замерзает”, так что  $c$  в соотношении (6.3) можно считать константой, а флуктуации смектических слоев описываются переменной  $\phi$ . Заметим, что условие  $\phi = 2\pi n$  (где  $n$  – целое число) задает максимумы плотности, то есть определяет положение смектических слоев. В основном состоянии  $\phi = q_0 z + \phi_0$ , что соответствует эквидистантным слоям, перпендикулярным оси  $Z$ , с толщиной слоя  $2\pi/q_0$ . В деформированном состоянии смектика максимумы плотности сдвигаются, так что

$$\phi = q_0[z - u(\mathbf{r})], \quad (6.4)$$

где  $u$  – введенное нами выше поле смещения смектических слоев.

Строго говоря, представление (6.3) справедливо только для случая слабой кристаллизации, когда модуляция плотности мала по сравнению со средней плотностью. В общем случае модуляция плотности в основном состоянии является периодической функцией (которую можно разложить в ряд Фурье). В деформированном же состоянии

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\phi_n), \quad (6.5)$$

где  $c_n$  – некоторые константы, а  $\phi_n$  – функции координат. Если мы интересуемся длинноволновыми деформациями, то за счет того, что

разные гармоники завязаны между собой, мы имеем  $\phi_n = n\phi + \theta_n$ , где  $\theta_n$  – новый набор констант. Таким образом, и в общем случае фактор  $\phi$  полностью определяет деформированное состояние смектика. Поэтому дальнейшее рассмотрение не зависит от глубины модуляции плотности смектика.

Заметим, что состояние смектика, заданное в терминах переменной  $\phi$ , не предполагает введения какой-либо выделенной оси (что требовалось для определения смещения  $u$ ). Поэтому имеет смысл переписать упругую энергию смектика через  $\phi$ , имея в виду, что эта энергия должна быть явно вращательно инвариантной. Кроме того, энергия должна быть инвариантна относительно преобразования  $\phi \rightarrow \phi + \text{const}$ , так как сдвиг фазы в (6.3) не изменяет макроскопическое состояние смектика. Поэтому энергия может зависеть только от градиента  $\phi$ . Далее, в равновесии градиент  $\nabla\phi$  отличен от нуля, по абсолютной величине он равен  $q_0$ . И, наконец, при малых смещениях  $u$  энергия смектика должна переходить в (6.1,6.2). Исходя из этих соображений, мы находим

$$\mathcal{F}_B = \int d^3r \frac{B}{8} [q_0^{-2}(\nabla\phi)^2 - 1]^2, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{F}_K = \int d^3r \frac{K}{2} q_0^{-2}(\nabla^2\phi)^2. \quad (6.7)$$

Выражение (6.7) является простым переписыванием (6.2), в то время как (6.6) содержит в себе нечто новое по сравнению с (6.1). А именно, подставляя выражение (6.4) в (6.6), мы получаем

$$\mathcal{F}_B = \int d^3r \frac{B}{2} \left[ \partial_z u - \frac{1}{2}(\nabla u)^2 \right]^2. \quad (6.8)$$

Здесь наряду с членом второго порядка (6.1) содержатся также члены третьего и четвертого по  $u$  порядка, которые определяются тем же модулем упругости  $B$ . Подчеркнем еще раз, что только полная сумма (6.8) обладает вращательной инвариантностью, которой не обладает каждое из этих слагаемых по отдельности.

## 6.2 Структурный фактор

Теперь мы приступаем к изучению роли флуктуаций смектических слоев. Как обычно, мы стартуем с описания в рамках квадратичного вклада в функционал Ландау, который для смектиков определяется (6.1,6.2), а затем примем во внимание взаимодействие флуктуаций, которое описывается вкладами третьего и четвертого порядка в (6.8).

Объектом нашего изучения будут корреляционные функции смещения  $u$ . Парную корреляционную функцию мы будем обозначать  $G$ :

$$G(\mathbf{r}) = \langle u(\mathbf{r})u(0) \rangle. \quad (6.9)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение с функцией распределения вероятности  $\propto \exp(-\mathcal{F}_B/T - \mathcal{F}_K/T)$ . Мы будем интересоваться также корреляционными функциями модуляции плотности (6.3), которые могут наблюдаться в экспериментах по нейтронному или рентгеновскому рассеянию на веществе.

Затравочное значение парной корреляционной функции (6.9), получающееся из (6.1, 6.2), в Фурье-представлении имеет вид

$$G_0(\mathbf{q}) = \frac{T}{Bq_z^2 + Kq^4}. \quad (6.10)$$

Нетрудно проверить, что интеграл

$$G_0(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{T}{Bq_z^2 + Kq^4} \quad (6.11)$$

расходится (логарифмически) при малых  $q$  и зависит, следовательно, от размера системы  $L$ :  $G_0 \approx (4\pi\sqrt{BK})^{-1} \ln(L/r)$ . Вычислим следующую разность (от размера не зависящую)

$$G_0(0) - G_0(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{T(1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}})}{Bq_z^2 + Kq^4} \simeq \frac{T}{4\pi\sqrt{BK}} \xi, \quad (6.12)$$

где

$$\xi = \ln \max \left[ \Lambda r_{\perp}, \Lambda \left( \frac{K}{B} \right)^{1/4} \sqrt{|z|} \right], \quad r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (6.13)$$

и  $\Lambda$  – обрезка. В силу анизотропии смектика следует уточнить определение обрезки: это предельный волновой вектор в плоскости  $X - Y$ . Отметим также, что при вычислении (6.12) мы учли, что характерное значение  $q_z \sim K^{1/2} B^{-1/2} q_{\perp}^2$  в интеграле много меньше, чем

$$q_{\perp} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}.$$

Поэтому в подынтегральном выражении  $q$  можно заменить на  $q_{\perp}$ . Это сразу позволяет разделить интегрирование по  $q_z$  и  $q_{\perp}$ .

Рассмотрим роль длинноволновых упругих флуктуаций смектика в формировании корреляционных функций модуляции плотности  $\varphi$ .

Если пренебречь самодействием  $u$ , то есть принять во внимание только члены (6.1,6.2) в разложении Ландау, то вычисление корреляционных функций (6.3) сводится к Гауссовым интегралам и может быть проделано явно. Среднее значение модуляции в соответствии с (6.3) определяется следующим выражением

$$\langle \cos \phi \rangle_0 = \cos(q_0 z) \exp \left( -\frac{1}{2} q_0^2 \langle u^2 \rangle_0 \right). \quad (6.14)$$

Так как величина  $\langle u^2 \rangle_0 = G_0(\mathbf{r} = 0)$  логарифмически зависит от размера системы, то среднее значение  $\varphi$  при увеличении размера системы  $L$  стремится к нулю (правда, довольно медленно, как некоторая степень  $L$ ). Можно сказать, что флуктуации  $u$  размывают модуляцию плотности в смектиках.

Вычислим теперь (в тех же предположениях) парную корреляционную функцию  $\varphi$ , которую обычно называют структурным фактором:  $S(\mathbf{r}) = \langle \varphi(\mathbf{r}) \varphi(0) \rangle$ . В соответствии с выражением (6.3) структурный фактор пропорционален

$$S(\mathbf{r}) \propto \langle \cos \phi(\mathbf{r}) \cos \phi(0) \rangle_0.$$

Расписывая здесь произведение косинусов через косинусы разности и суммы и усредняя каждый из них (средним от второго можно пренебречь), мы находим

$$S(\mathbf{r}) \propto \cos(q_0 z) \exp \{ -q_0^2 [G_0(0) - G_0(\mathbf{r})] \} \propto r_{\perp}^{-\zeta} \cos(q_0 z), \quad (6.15)$$

где

$$\zeta = \frac{T q_0^2}{4\pi \sqrt{BK}}. \quad (6.16)$$

Закон пропорциональности  $\propto r_{\perp}^{-\zeta}$  является следствием (6.12), он справедлив при условии  $r_{\perp}^2 \gg |z| \sqrt{K/B}$ . Таким образом, флуктуации расстраивают чисто периодический характер корреляций, который наблюдался бы в теории среднего поля.

Выше при анализе структурного фактора мы принимали во внимание только первый член ряда (6.5). Вообще говоря, следующие члены этого ряда также дают вклады в структурный фактор. Эти вклады должны наблюдаться в виде высших гармоник  $\propto \cos(nq_0 z)$  в  $S(\mathbf{r})$ . Отметим, что флуктуационное подавление факторов при  $\cos(nq_0 z)$  в  $S(\mathbf{r})$  оказывается еще сильнее, чем в (6.15). Повторяя все шаги, ведущие к (6.15), мы получаем

$$S_n(\mathbf{r}) \propto r_{\perp}^{-n^2 \zeta} \cos(q_0 z n).$$



Рис. 6.1: Однопетлевой вклад в собственно-энергетическую функцию.

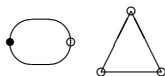


Рис. 6.2: Однопетлевые вклады в тройную вершинную функцию.

### 6.3 Ренорм-групповые уравнения

Теперь мы приступаем к анализу флуктуационных поправок к корреляционной функции (6.10), обязанных вкладом третьего и четвертого порядка в (6.8). Стартуя с этих выражений, можно сформулировать теорию возмущений для вычисления корреляционных функций смещения  $u$ . Поправки к затравочным выражениям будут определяться диаграммами с тройными и четверными вершинами, которым в соответствии с (6.8) сопоставляются факторы  $B$  и определенные комбинации волновых векторов. Первые (однопетлевые) вклады в собственно-энергетическую функцию, а также в тройную и четверную вершинные функции изображены на рисунках (6.1, 6.2, 6.3), где белый (незаполненный) диск изображает тройную вершину, а темный (залитый) диск изображает четверную вершину. Можно рассмотреть и вклады в собственно-энергетическую и вершинные функции более высокого порядка (многопетлевые).

Анализ выражений, соответствующих диаграммам, приведенным на рисунках (6.1, 6.2, 6.3), показывает, что они воспроизводят структуру затравочного значения  $[G(\mathbf{q})]^{-1}$  и затравочных вершинных функций, давая логарифмические поправки к исходным модулям упругости (то есть  $B$  и  $K$ ). То же справедливо и для вкладов более высокого



Рис. 6.3: Однопетлевые вклады в четверную вершинную функцию.

порядка, которым соответствуют многопетлевые диаграммы. Следовательно, мы снова сталкиваемся с проблемой суммирования главных логарифмических поправок. Подобная проблема для фазовых переходов в размерности 4 рассматривалась в лекции 3, где решение достигается суммированием паркетных диаграмм. Для смектиков подобный отбор диаграмм возможен, но он приводит к более громоздкой процедуре из-за наличия двух типов вершин. Поэтому мы сразу переходим к ренорм-групповой (РГ) процедуре (которая для фазовых переходов была сформулирована в лекции 4). Ренорм-групповая процедура эффективно работает, если главные поправки к объектам (корреляционным функциям, вершинным функциям) на масштабе  $R$  определяются флуктуациями на масштабах  $r \ll R$ . Это как раз типичная ситуация при логарифмическом характере поправок.

В соответствии с общими правилами РГ-процедуры сначала мы продельваем ее элементарный шаг. Для этого мы разбиваем поле  $u$  на медленную  $u'$  и быструю  $\tilde{u}$  части:  $u = u' + \tilde{u}$ . Нам удобно будет произвести разбиение таким образом, что

$$\tilde{u}(\mathbf{r}) = \sum_q u_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}),$$

где  $\Lambda' < q_\perp < \Lambda$ . Здесь  $\Lambda$  – обрезка, а  $\Lambda'$  разделяет быстрые и медленные волновые вектора. Что же касается компоненты  $q_z$ , то мы не будем накладывать на нее никаких ограничений. Функционал Ландау для медленных переменных  $\mathcal{F}'(u')$  определяется согласно соотношению

$$\exp(-\mathcal{F}'/T) = \int \mathcal{D}\tilde{u} \exp(-\mathcal{F}/T). \quad (6.17)$$

Напомним, что фактор в левой части (6.17) определяет распределение вероятностей для степеней свободы с волновыми векторами  $q_\perp < \Lambda'$ , то есть  $\mathcal{F}'(u')$  содержит в себе полную информацию о корреляционных функциях медленных переменных.

Чтобы найти  $\mathcal{F}'$ , можно использовать теорию возмущений (так как число степеней свободы быстрых переменных ограничено). Тем не менее, мы будем полагать  $\Lambda' \ll \Lambda$ , что дает возможность производить отбор вкладов по большому логарифму  $\ln(\Lambda/\Lambda')$ . Эти два условия, большое значение логарифма  $\ln(\Lambda/\Lambda')$  и применимость теории возмущений, совместимы при малом значении безразмерной константы связи (сравни лекцию 4). Для смектиков выражение для безразмерной константы связи будет приведено ниже.

Исходным пунктом РГ-процедуры является разложение функционала Ландау по быстрому полю  $\tilde{u}$ . Член первого порядка этого разложения отличен от нуля только для Фурье-гармоник с волновыми

векторами  $q$  вблизи  $\Lambda'$  (в силу условия, что в любом члене  $\mathcal{F}$ , переписанном в Фурье-представлении, сумма волновых векторов должна быть равна нулю). Поэтому он не может производить вкладов, содержащих большой логарифм  $\ln(\Lambda/\Lambda')$ , из-за чего мы будем игнорировать этот член. Первым нетривиальным членом разложения  $\mathcal{F}$  по  $\tilde{u}$  является член второго порядка. Если ограничиться им, то мы получим так называемое однопетлевое приближение, которое, как правило, является главным в РГ-уравнениях. Именно в этом приближении проделаны все дальнейшие вычисления.

Раскладывая сумму (6.2) и (6.8) по  $\tilde{u}$  до второго порядка, мы находим

$$\mathcal{F}(u) \rightarrow \mathcal{F}(u') + \tilde{\mathcal{F}}_{(2)} + \mathcal{F}_{int}, \quad (6.18)$$

$$\mathcal{F}_{int} = \mathcal{F}_{i1} + \mathcal{F}_{i2} + \mathcal{F}_{i3}, \quad (6.19)$$

где

$$\tilde{\mathcal{F}}_{(2)} = \int d^3r \left[ \frac{B}{2} (\partial_z \tilde{u})^2 + \frac{K}{2} (\nabla^2 \tilde{u})^2 \right], \quad (6.20)$$

$$\mathcal{F}_{i1} = -\frac{B}{2} \int d^3r \partial_z u' (\nabla \tilde{u})^2, \quad (6.21)$$

$$\mathcal{F}_{i2} = -B \int d^3r \nabla u' \nabla \tilde{u} \partial_z \tilde{u}, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{F}_{i3} = \frac{B}{4} \int d^3r \{ (\nabla u')^2 (\nabla \tilde{u})^2 + 2(\nabla u' \nabla \tilde{u})^2 \}. \quad (6.23)$$

Теперь мы должны подставить разложение (6.18) в (6.17) и произвести интегрирование по быстрому полю  $\tilde{u}$ . В силу сделанных предположений поправки к  $\mathcal{F}(\varphi')$  малы, и поэтому можно произвести разложение левой части (6.17) по  $\mathcal{F}'(u') - \mathcal{F}(u')$ , а правой части по  $\mathcal{F}_{int}$ . В результате мы получаем

$$\mathcal{F}'(u') - \mathcal{F}(u') \simeq \langle \mathcal{F}_{int} \rangle_0 - \frac{\langle \mathcal{F}_{int}^2 \rangle_0}{2T} + \frac{\langle \mathcal{F}_{int}^3 \rangle_0}{6T^2} - \frac{\langle \mathcal{F}_{int}^4 \rangle_0}{24T^3}, \quad (6.24)$$

где индекс ноль означает усреднение по функции распределения вероятности  $\propto \exp[-\tilde{\mathcal{F}}_{(2)}]$ . Мы сохранили в (6.24) члены разложения по  $\mathcal{F}_{int}$ , которые дают логарифмические вклады в  $\mathcal{F}'(u')$ . Двойные скобки в (6.24) означают, что в среднем следует брать только вклады, соответствующие связным диаграммам, поскольку неприводимые части (соответствующие несвязным диаграммам) сокращаются с соответствующими членами разложения левой части (6.17) по  $\mathcal{F}'(u') - \mathcal{F}(u')$ .

Усреднение по функции распределения вероятности  $\propto \exp[-\tilde{\mathcal{F}}_{(2)}]$  является Гауссовым, так что все корреляционные функции  $\tilde{u}$ , найден-

ные по этому распределению вероятности, сводятся к парной корреляционной функции (6.10) (записанной в Фурье-представлении), которая отлична от нуля при  $\Lambda' < q < \Lambda$ .

Первое слагаемое в (6.24) сводится к

$$\langle \mathcal{F}_{int} \rangle_0 = \int d^3r (B/2) (\nabla u')^2 \langle (\nabla \tilde{u})^2 \rangle_0, \quad (6.25)$$

где

$$\langle (\nabla \tilde{u})^2 \rangle_0 \approx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{Tq_{\perp}^2}{Bq_z^2 + Kq_{\perp}^4}. \quad (6.26)$$

Мы учли здесь уже обсуждавшееся неравенство  $q_z \ll q_{\perp}$  для характерного значения волнового вектора. Напомним, что  $\Lambda' < q_{\perp} < \Lambda$ , а на  $q_z$  не наложено никаких ограничений, то есть интеграл по  $q_z$  идет от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Интеграл (6.26) является “ультрафиолетовым”, то есть определяется окрестностью верхнего предела  $\Lambda$ . Как мы уже установили, изучая теорию фазовых переходов, такого рода величины должны включаться в ренормировки параметров теории, которые не могут быть вычислены в длинноволновом приближении. Для того, чтобы понять, ренормировку какого параметра производит член (6.25), вернемся к выражению (6.6) и сдвинем в нем  $q_0$ . Подставляя затем (6.4) и учитывая, что  $|\nabla \phi| \approx q_0$ , мы находим как раз член, имеющий структуру (6.25). Таким образом, первое слагаемое в правой части (6.24) дает только ренормировку  $q_0$  (или, другими словами, ренормировку периода одномерной модуляции плотности), и не приводит поэтому к каким-либо крупномасштабным эффектам.

Член  $\langle \mathcal{F}_{int}^2 \rangle_0$  в правой части (6.24) дает несколько разных логарифмических вкладов в  $\mathcal{F}'$ . Первый из этих логарифмических вкладов записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_1 \mathcal{F}' &= -\frac{1}{2T} \langle \mathcal{F}_{i1}^2 \rangle_0 \\ &= -\frac{B^2}{8T} \int d^3r_1 d^3r_2 \partial_z u_1 \partial_z u_2 \langle (\nabla \tilde{u}_1)^2 (\nabla \tilde{u}_2)^2 \rangle_0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

где  $u_{1,2} = u'(\mathbf{r}_{1,2})$ . Среднее в (6.27) имеет характерный масштаб  $1/\Lambda'$  и потому мы можем подставить  $u_2 \rightarrow u_1$  так как  $u'$  – медленное поле. После этой подстановки мы получаем вклад в функционал Ландау, по структуре совпадающий с (6.1). Коэффициент в нем определяется интегралом

$$\begin{aligned} &\int d^3r_2 \langle (\nabla \tilde{u}_1)^2 (\nabla \tilde{u}_2)^2 \rangle_0 = 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^4 G_0^2(\mathbf{q}) \\ &\approx 2 \int \frac{dq_z d^2q_{\perp}}{(2\pi)^3} q_{\perp}^4 \frac{T^2}{(Bq_z^2 + Kq_{\perp}^4)^2} = \frac{T^2}{4\pi B^{1/2} K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}, \end{aligned}$$



где сначала вычислен интеграл по  $q_z$  (который, напомним, идет в бесконечных пределах), а затем уже взят интеграл по  $q_\perp$ , который идет от  $\Lambda'$  до  $\Lambda$ . Подставляя это выражение в (6.27), мы находим

$$\Delta_1 \mathcal{F}' = -\frac{TB^{3/2}}{32\pi K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int d^3r (\partial_z u)^2. \quad (6.28)$$

Второй логарифмический вклад в  $\mathcal{F}'$ , производимый  $\langle\langle \mathcal{F}_{int}^2 \rangle\rangle$ , записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \Delta_2 \mathcal{F}' &= -\frac{1}{2T} \langle\langle \mathcal{F}_{i2}^2 \rangle\rangle_0 \\ &= -\frac{B^2}{2T} \int d^3r_1 d^3r_2 \nabla_i u_1 \nabla_k u_2 \langle\langle \partial_z \tilde{u}_1 \nabla_i \tilde{u}_1 \partial_z \tilde{u}_2 \nabla_k \tilde{u}_2 \rangle\rangle_0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где  $u_1 = u'(\mathbf{r}_1)$ ,  $u_2 = u'(\mathbf{r}_2)$ . Мы проанализируем этот вклад несколько позже. Имеется еще два логарифмических вклада в  $\mathcal{F}'$ , производимых  $\langle\langle \mathcal{F}_{int}^2 \rangle\rangle_0$ :

$$\Delta_3 \mathcal{F}' = -\frac{1}{T} \langle\langle \mathcal{F}_{i1} \mathcal{F}_{i3} \rangle\rangle_0, \quad \Delta_4 \mathcal{F}' = -\frac{1}{2T} \langle\langle \mathcal{F}_{i3}^2 \rangle\rangle_0. \quad (6.30)$$

Действуя так же, как и при выводе (6.28), мы находим

$$\Delta_3 \mathcal{F}' = \frac{TB^{3/2}}{16\pi K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int d^3r \partial_z u (\nabla u)^2, \quad (6.31)$$

$$\Delta_4 \mathcal{F}' = -\frac{9TB^{3/2}}{256\pi K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int d^3r (\nabla u)^4. \quad (6.32)$$

Как и выше, мы пренебрегли везде  $q_z$  по сравнению с  $q_\perp$  и, соответственно, заменили  $(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2$  на  $(\nabla u)^2$ .

Теперь мы приступаем к рассмотрению логарифмических вкладов в  $\mathcal{F}'$ , производимых  $\langle\langle \mathcal{F}_{int}^3 \rangle\rangle_0$ . Имеется два таких вклада:

$$\Delta_5 \mathcal{F}' = \frac{1}{2T^2} \langle\langle \mathcal{F}_{i1} \mathcal{F}_{i2}^2 \rangle\rangle_0, \quad \Delta_6 \mathcal{F}' = \frac{1}{2T^2} \langle\langle \mathcal{F}_{i3} \mathcal{F}_{i2}^2 \rangle\rangle_0. \quad (6.33)$$

И, наконец, имеется логарифмический вклад, производимых  $\langle\langle \mathcal{F}_{int}^4 \rangle\rangle_0$ :

$$\Delta_7 \mathcal{F}' = -\frac{1}{24T^3} \langle\langle \mathcal{F}_{i2}^4 \rangle\rangle_0, \quad (6.34)$$

Действуя так же, как и при выводе (6.28), мы находим

$$\Delta_5 \mathcal{F}' = -\frac{TB^{3/2}}{32\pi K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int d^3r \partial_z u (\nabla u)^2, \quad (6.35)$$

$$\Delta_6 \mathcal{F}' = \frac{5TB^{3/2}}{128\pi K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int d^3r (\nabla u)^4, \quad (6.36)$$

$$\Delta_7 \mathcal{F}' = -\frac{3TB^{3/2}}{256\pi K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int d^3r (\nabla u)^4. \quad (6.37)$$

Суммируя теперь поправки  $\Delta_1 \mathcal{F}'$ ,  $\Delta_3 \mathcal{F}' \div \Delta_7 \mathcal{F}'$ , мы находим, что они собираются в комбинацию, выписанную в выражении (6.8). Это является следствием вращательной инвариантности, “зашитой” в комбинации (6.8). Как следует из найденных выражений, элементарный шаг РГ дает поправку к модулю  $B$ , которая записывается в следующем виде

$$B' - B = -\frac{TB^{3/2}}{16\pi K^{3/2}} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}. \quad (6.38)$$

Обратим внимание на то, что проделанный шаг РГ-процедуры соответствует на языке обычной теории возмущений учету однопетлевых диаграмм, изображенных на рисунках 6.1, 6.2, 6.3 и определяющих ренормировку  $G^{-1}(\mathbf{q})$ , тройной и четверной вершинных функций, соответственно. Вообще говоря, эти величины (затравочное значение каждой из которых определяется модулем  $B$ ) могут ренормироваться по-разному. Однако, как показало прямое вычисление, логарифмические поправки к  $B$  для всех трех величин идентичны. Это свойство является следствием вращательной симметрии, которая ведет к инвариантности функционала Ландау относительно преобразования

$$\delta u = \theta x + \theta z \partial_x u - \theta x \partial_z u, \quad (6.39)$$

где  $\theta$  – инфинитезимальный параметр, имеющий смысл угла поворота. Инвариантность функционала (6.8) относительно (6.39) можно легко проверить, используя соотношение

$$\delta \left[ \partial_z u - \frac{(\nabla u)^2}{2} \right] = \theta z \partial_x \left[ \partial_z u - \frac{(\nabla u)^2}{2} \right] - \theta x \partial_z \left[ \partial_z u - \frac{(\nabla u)^2}{2} \right], \quad (6.40)$$

которое является стандартным законом преобразования скаляра при вращении, и которое почти очевидно, если вспомнить происхождение  $\partial_z u - (\nabla u)^2/2$  из  $(\nabla \phi)^2$ . Подставляя (6.40) в (6.8), мы находим, что поправка к подынтегральному выражению имеет вид полной производной, которая исчезает при интегрировании по частям. Проверка же инвариантности члена (6.2) относительно преобразования (6.39) не представляет труда, поскольку  $\nabla^2 \delta u = (\theta z \partial_x - \theta x \partial_z) \nabla^2 u$ . Так как преобразование (6.39) является нелинейным по  $u$ , оно связывает между собой члены различного порядка в функционале Ландау. Поэтому инвариантность функционала Ландау относительно этого преобразования “заставляет” одинаково ренормироваться факторы при этих членах.

Возвратимся теперь к анализу вклада (6.29). Мы опять должны использовать медленность изменения поля  $u'$  на масштабе  $\Lambda'^{-1}$ , который является характерным для среднего в (6.29). Если просто подставить

$u_2 \rightarrow u_1$ , то мы получим член вида (6.25), который должен быть включен в переопределение  $q_0$ . Это означает, что мы должны разложить  $u_2$  по разности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Нулевой член разложения дает уже обсуждавшуюся замену  $u_2 \rightarrow u_1$ . Первый член разложения дает вклад, который (в силу нечетности) исчезает после интегрирования по углам. Второй же член разложения по  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  дает (после однократного интегрирования по частям в интеграле по  $\mathbf{r}_1$  и интегрирования по частям в интеграле по  $z$  в одном из слагаемых)

$$\Delta_2 \mathcal{F}' = \frac{B^2}{4T} \int d^3 r_1 \partial_\alpha \partial_\gamma u_1 \partial_\beta \partial_\delta u_1 \int d^3 r \, r_\gamma r_\delta [\partial_z \partial_\alpha G_0(\mathbf{r}) \partial_z \partial_\beta G_0(\mathbf{r}) - \partial_z G_0(\mathbf{r}) \partial_z \partial_\alpha \partial_\beta G_0(\mathbf{r})] .$$

Здесь индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  пробегает значения  $x, y$ , а  $G_0$  определяется (6.11). Мы приняли во внимание только члены разложения по  $x, y$ , но не по  $z$ , и опустили везде, где это возможно, производные по  $z$ , так как только оставшиеся члены дают логарифмические интегралы. Теперь мы можем вычислить интеграл по  $\mathbf{r}$ , воспользовавшись следующим из формулы (6.11) выражением

$$\partial_z G_0 = -\frac{T}{8\pi\sqrt{BK}z} \exp\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{B}{K}} \frac{r_\perp^2}{|z|}\right) .$$

В результате мы находим

$$\Delta_2 \mathcal{F}' = \frac{T}{64\pi} \sqrt{\frac{B}{K}} \ln(\Lambda/\Lambda') \int d^3 r_1 (\nabla_\perp^2 u_1)^2 . \quad (6.41)$$

С нашей точностью  $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  может быть заменено на  $\nabla^2$  (поскольку для характерных волновых векторов  $q_z \ll q_\perp$ ). В результате мы приходим к члену такой же структуры, что (6.2), то есть мы находим следующую поправку к модулю  $K$ :

$$K' - K = \frac{TB^{1/2}}{32\pi K^{1/2}} \ln(\Lambda/\Lambda') . \quad (6.42)$$

Все сказанное выше справедливо, если  $B - B' \ll B$  и  $K' - K \ll K$ . Это ведет к соотношению

$$TB^{1/2} \ll K^{3/2} , \quad (6.43)$$

при котором неравенства  $B - B' \ll B$  и  $K' - K \ll K$  совместимы с условием  $\Lambda \gg \Lambda'$ , которое позволяет удерживать только главные логарифмические вклады во все величины.

Теперь мы переходим от элементарного шага РГ к многошаговой процедуре, благодаря которой можно постепенно исключить из рассмотрения быстрые переменные. Так как на каждом шаге параметры функционала Ландау меняются мало, то вместо малых приращений (6.38, 6.42) мы можем сформулировать дифференциальные уравнения

$$\frac{dB}{d\xi} = -\frac{TB^{3/2}}{16\pi K^{3/2}}, \quad \frac{dK}{d\xi} = \frac{TB^{1/2}}{32\pi K^{1/2}}. \quad (6.44)$$

Здесь  $\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ , а  $\Lambda'$  – текущая обрезка, которая является максимальным волновым вектором оставшихся степеней свободы. Напомним, что именно уравнения типа (6.44) называются уравнениями ренорм-группы или уравнениями Гелл-Манна-Лоу.

Чтобы решить уравнения (6.44), удобно ввести следующую комбинацию

$$g = \frac{5TB^{1/2}}{64\pi K^{3/2}}, \quad (6.45)$$

которая, как следует из (6.44), удовлетворяет уравнению

$$dg/d\xi = -g^2. \quad (6.46)$$

Мы уже сталкивались с таким уравнением при анализе фазовых переходов в четырехмерном пространстве (смотри лекцию 4). Там мы (по аналогии с квантовой электродинамикой) называли  $g$  инвариантным зарядом. Точно также мы будем поступать и здесь. Заметим, что условие (6.43) означает  $g \ll 1$ , то есть малую величину инвариантного заряда. Решение уравнения (6.46) имеет вид

$$g = \frac{g_0}{1 + g_0\xi}. \quad (6.47)$$

Здесь  $g_0$  – затравочное значение параметра  $g$ , то есть его значение на масштабах  $1/\Lambda$ . Мы видим, что если  $\xi \gg g_0^{-1}$ , то  $g \simeq \xi^{-1} \rightarrow 0$ . Это свойство, называемое “нуль-зарядом”, оправдывает приведенную выше процедуру по крайней мере для больших  $\xi$ . Если же  $g_0 \ll 1$ , то  $g$  мал на всех масштабах. Подставляя (6.47) в (6.44) мы находим уравнения [29]

$$dB/d\xi = -4/5gB, \quad dK/d\xi = 2/5gK,$$

которые имеют решения

$$B = B_0(1 + g_0\xi)^{-4/5}, \quad K = K_0(1 + g_0\xi)^{2/5}. \quad (6.48)$$

Здесь  $B_0$  и  $K_0$  – затравочные значения модулей (которые наблюдаются на малых масштабах).

Теперь мы можем определить форму корреляционных функций поля  $u$ . Если мы интересуемся этими корреляционными функциями на масштабе  $r$ , то мы должны проинтегрировать по всем Фурье-гармоникам  $u$  с волновыми векторами больше, чем  $r^{-1}$  в соответствии с (6.17). Такое интегрирование сводится к замене исходного разложения Ландау на новое, с ренормированными значениями модулей  $B$  и  $K$ , которые являются решениями (6.44), взятыми при  $\xi = \ln(r\Lambda)$ . После этого исключения мы можем пренебречь самодействием  $u$  на шкалах меньше или порядка  $r$  в силу малости инвариантного заряда  $g$ . Тогда для парной корреляционной функции мы возвращаемся к выражению (6.11), но с ренормированными значениями модулей  $B, K$ . Заметим, что в  $\mathbf{r}$ -представлении выражение для разности (6.12) приобретает вид

$$G(0) - G(r) = \frac{8K_0}{3B_0} \left[ (1 + g_0\xi)^{6/5} - 1 \right]. \quad (6.49)$$

Отметим, что  $\xi = \ln(r\Lambda)$ , если  $r_\perp^2 \gg |z|\sqrt{K/B}$ , что является типичным случаем. В общем случае  $\xi$  в (6.49) следует определять в соответствии с (6.13). Формула же (6.12) является первым членом разложения (6.49) по  $\xi$ .

Необходимо быть аккуратным при обращении с такими объектами, как корреляционные функции модуляции плотности (6.3). Дело в том, что в длинноволновое поведение таких сложных функций  $u$  могут вносить вклад коротковолновые флуктуации  $u$ . Исследуем в качестве примера поведение структурного фактора  $S(\mathbf{r}) = \langle \varphi(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{0}) \rangle$  с учетом флуктуаций. Прежде всего заметим, подставляя в  $S$  выражение (6.3), что

$$S(\mathbf{r}) \propto \langle \cos \{q_0 z - q_0 [u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{0})]\} \rangle,$$

поскольку среднее от косинуса суммы углов стремится к нулю в пределе бесконечно больших размеров системы. Далее, произведем стандартное разделение поля  $u$  на быструю и медленную части  $u \rightarrow u' + \tilde{u}$  и проинтегрируем по быстрой составляющей. Тогда мы получим

$$S = Z(\xi) \langle \cos \{q_0 z - q_0 [u'(\mathbf{r}_\perp, 0) - u'(0, 0)]\} \rangle.$$

Для фактора  $Z$  мы можем найти уравнение РГ, которое записывается в следующем виде  $dZ = -Zq_0^2[dG(0) - dG(\mathbf{r})]$ . Его решение имеет вид  $Z = Z_0 \exp\{-q_0^2[G(0) - G(\mathbf{r})]\}$ , где  $Z_0$  – коротковолновое значение  $Z$ , практически не зависящее от  $\mathbf{r}$ . Таким образом, мы получаем

$$S \propto \exp\{-q_0^2[G(0) - G(\mathbf{r})]\} \cos(q_0 z). \quad (6.50)$$

Здесь разность  $G(0) - G(\mathbf{r})$  определяется (6.49).

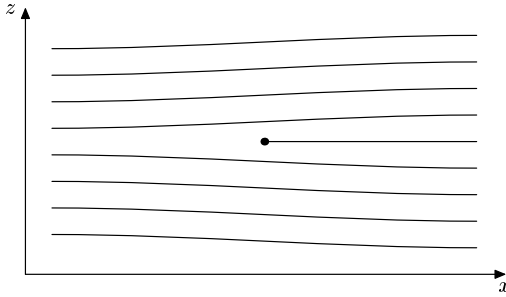


Рис. 6.4: Краевая дислокация, которая возникает при “вдвигании” в смектик дополнительного смектического слоя.

## 6.4 Дислокации в смектике

Рассмотрим краевую дислокацию в смектике. Пусть дислокация является прямой, параллельной оси  $Y$ . Будем считать, что дислокация образовалась в результате “вдвигания” в смектик дополнительного смектического слоя со стороны положительных  $x$  (рисунок 6.4). Сдвинем начало системы координат на линию дислокации. Тогда дополнительный смектический слой будет занимать полуплоскость, определяемую условиями  $z = 0, x > 0$ . С макроскопической точки зрения на дислокационной линии (то есть на прямой  $x = 0, z = 0$ ) величина  $\phi$ , входящая в (6.3), имеет сингулярность. При обходе вокруг этой сингулярности против часовой стрелки

$$\oint d\mathbf{r} \nabla \phi = 2\pi, \quad (6.51)$$

что как раз и соответствует лишнему смектическому слою при положительных  $x$ . На языке смещения  $u$ , связанного с  $\phi$  посредством (6.4), соотношение (6.51) переписывается в виде

$$\oint d\mathbf{r} \nabla u = -\frac{2\pi}{q_0}, \quad (6.52)$$

Вторым условием, которое накладывается на поле смещения  $u$  вокруг дислокации, является уравнение упругости

$$(B\partial_z^2 - K\nabla^4)u = 0. \quad (6.53)$$

В принятой нами геометрии смещение  $u$  не зависит от координаты  $y$ . Будем также считать, что для характерного волнового вектора

$q_{\perp} \gg q_z$  (это неравенство будет обосновано ниже). Тогда поле  $u$  можно записать в виде интеграла

$$u(x, z) = \frac{\text{sign}(z)}{2iq_0} \int \frac{dq_x}{q_x} \exp(-\lambda q_x^2 |z| + iq_x x), \quad (6.54)$$

где  $\lambda = \sqrt{K/B}$ . Интеграл имеет особенность при  $q_x = 0$ , способ разрешения которой не важен. Например, интеграл можно понимать в смысле главного значения (переход от этого способа вычисления интеграла к другому, скажем, к обходу особенности снизу, приводит только к несущественному сдвигу  $u \rightarrow u + \text{const}$ ).

Проверим теперь выполнение условий (6.52, 6.53) для выражения (6.54). Выполнение уравнения (6.53) проверяется прямым дифференцированием (с учетом того, что  $\nabla^4 \rightarrow q_x^4$ ). Для проверки (6.52) выпишем сначала производную

$$\partial_x u(x, z) = \frac{\text{sign}(z)}{2q_0} \int dq_x \exp(-\lambda q_x^2 |z| + iq_x x).$$

Используя соотношение  $\int dx \exp(iqx) = 2\pi\delta(q)$ , мы находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x u(x, z) = \frac{\pi \text{sign}(z)}{q_0}.$$

Выбираем теперь замкнутый контур, обходящий начало координат, в виде двух прямых  $z = \pm z_0$ . Интеграл по этому контуру сводится к интегралам, выписанным выше, и в результате для этого контура мы приходим к соотношению (6.52). Поскольку производные  $u$  (6.55, 6.56) являются аналитической функцией  $z$  и  $x$ , то выбранный нами контур можно произвольно деформировать (не пересекая начало координат) без изменения значения контурного интеграла. Тем самым обосновывается соотношение (6.52) для произвольного контура, охватывающего начало координат.

Вычисляя в (6.54) интеграл по  $q_x$ , мы находим

$$\partial_x u = \text{sign}(z) \frac{b}{4\sqrt{\pi} \lambda^{1/2} |z|^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right], \quad (6.55)$$

$$\partial_z u = -\frac{bx}{8\sqrt{\pi} \lambda^{1/2} |z|^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right], \quad (6.56)$$

где  $b = 2\pi/q_0$  – вектор Бюргерса. В таком виде выражения для поля смещения справедливы для обоих возможных знаков  $b$  (соответствующих вдвиганию дополнительного смектического слоя справа или слева). Характерное значение волнового вектора  $q_x$  в приведенных выше

интегралах оценивается как  $q_x \sim 1/x$ , и, далее  $q_z \sim \lambda q_x^2 \sim \lambda/x^2$ . Таким образом, условие  $q_z \ll q_\perp$ , необходимое для справедливости (6.54), переписывается в виде  $|x| \gg \lambda$ , что всегда выполняется в длинноволновом пределе.

Если мы учтем флуктуации, то модули  $B$  и  $K$  в (6.53) станут логарифмическими функциями масштаба. Таким образом, для больших логарифмов  $\xi$  мы находим из (6.48)  $\lambda \propto \xi^{3/5}$ . Здесь мы можем положить  $\xi = \ln(\Lambda|x|)$ .

Весьма просто можно исследовать винтовую дислокацию в смектике, линия которой должна быть направлена вдоль оси  $Z$ . Подходящим решением уравнения (6.53) является  $u = \pm q_0^{-1} \varphi$ , где  $\varphi$  – азимутальный угол в плоскости  $X - Y$ . Градиент  $u$  не зависит от  $z$  и обратно пропорционален расстоянию до линии дислокации. Основная энергия винтовой дислокации сосредоточена вблизи ее ядра.

## Задачи

### Задача 6.1

Получить выражение (6.42) для поправки к модулю  $K$  в Фурье-представлении.

#### Решение задачи 6.1

Перепишем вклад (6.29) через Фурье-гармоники

$$\Delta_2 \mathcal{F}' = \frac{1}{2} \sum_q \sigma(q) u'_{-q} u'_q.$$

Тогда

$$\sigma(\mathbf{q}) = -\frac{B^2}{T} q_i q_j \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} G_0(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2) G_0(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2) \{ (k_z + q_z/2)^2 (k_i - q_i/2)(k_j - q_j/2) + (k_z^2 - q_z^2/4)(k_i k_j - q_i q_j/4) \},$$

где  $G_0(\mathbf{k})$  определяется (6.10). Нас интересует логарифмический вклад  $\propto q_\perp^4$ . В этом случае в выписанном выше интеграле можно положить  $q_z \rightarrow 0$ , и мы находим

$$\sigma(\mathbf{q}) = - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2B^2 T k_z^2 (k_\alpha q_\alpha)^2}{[Bk_z^2 + K(k_\alpha + q_\alpha/2)^4][Bk_z^2 + K(k_\alpha - q_\alpha/2)^4]},$$

где мы подставили  $Kk^4 \rightarrow Kk_\perp^4$ . Главный вклад в  $\sigma$ , пропорциональный  $q_\perp^2$ , следует включить в переопределение  $q_0$ . Основным же член,



интересующий нас, получается при разложении полученного выражения до следующего порядка по  $\mathbf{q}$ , он равен

$$\begin{aligned} 2B^2T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_z^2 (k_\alpha q_\alpha)^2 & \left\{ \frac{K[k_\perp^2 q_\perp^2 + 2(k_\alpha q_\alpha)^2]}{(Bk_z^2 + Kk_\perp^4)^3} - \frac{4K^2 k_\perp^4 (k_\alpha q_\alpha)^2}{(Bk_z^2 + Kk_\perp^4)^4} \right\} \\ & = \frac{1}{2} B^2 K T q_\perp^4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_z^2 k_\perp^4 \frac{5Bk_z^2 - Kk_\perp^4}{(Bk_z^2 + Kk_\perp^4)^4}. \end{aligned}$$

Вычисляя здесь интеграл по  $\mathbf{k}$  (с учетом неравенств  $\Lambda' < k_\perp < \Lambda$ ), мы находим  $\sigma \rightarrow (K' - K)q_\perp^4$ , где  $K' - K$  определяется выражением (6.42). Таким образом, мы воспроизвели этот результат.

### Задача 6.2

Найти силу взаимодействия на единицу длины двух линейных параллельных краевых дислокаций в смектике.

### Решение задачи 6.2

Как обычно, сила, действующая на дислокацию, определяется ее ориентацией, вектором Бюргерса и полем напряжений, внешним по отношению к этой дислокации [30]. Нам, однако, удобнее будет получить силу взаимодействия дислокаций непосредственно, стартуя с функционала Ландау. Мы будем работать в линейном приближении, когда поле смещения можно представить в виде  $u = u_1 + u_2$ , где  $u_1$  и  $u_2$  – поля смещений отдельных дислокаций, которые определяются приведенными выше формулами. Будем по-прежнему считать, что дислокации параллельны оси  $Y$ . Тогда изменение энергии системы при сдвиге второй дислокации равно

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{L} = \int dx dz \left( B \partial_z u_1 \partial_z \delta u_2 + K \partial_x^2 u_1 \partial_x^2 \delta u_2 \right), \quad (6.57)$$

где  $L$  – длина дислокаций, а  $\delta u_2$  – изменение поля второй дислокации, возникающее за счет ее сдвига. Оно может быть записано в виде  $\delta u_2 = -\mathbf{s} \nabla u_2$ , где  $\mathbf{s}$  – вектор этого сдвига. Заметим, что поле (6.55, 6.56) удовлетворяет следующему уравнению

$$(\partial_z^2 - \lambda^2 \partial_x^4) u = b \partial_x^{-1} \partial_z \delta(x) \delta(z). \quad (6.58)$$

Интегрируя в соотношении (6.57) по частям и используя (6.58), мы получаем  $\delta \mathcal{F}/L = -\mathbf{f} \mathbf{s}$ , где выражение для силы  $\mathbf{f}$  (на единицу длины), действующей на вторую дислокацию, имеет вид

$$\mathbf{f} = -B b_2 \nabla \partial_x^{-1} \partial_z u_1(x, z).$$

Здесь  $u_1$  – поле смещения первой дислокации,  $b_2$  – вектор Бюргерса второй дислокации (равный  $\pm b$ ), а  $x, z$  – ее координаты. Подставляя

в полученное выражение для силы  $\mathbf{f}$  соотношение (6.55), мы находим

$$\mathbf{f} = -B\nabla \frac{b_1 b_2 \sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\pi}|z|} \exp \left[ -\frac{x^2}{4\lambda|z|} \right]. \quad (6.59)$$

Здесь  $b_1$  – вектор Бюргерса первой дислокации (также равный  $\pm b$ ), и мы считаем, что она расположена вдоль оси  $Y$ . Таким образом вектор  $(x, z)$  определяет относительное положение дислокаций. Если  $z = 0$  (то есть дислокации лежат в одном смектическом слое), то сила их взаимодействия равна нулю. Если же  $x = 0$ , то мы находим, что сила  $\mathbf{f}$  направлена вдоль оси  $Z$  и

$$f_z = \frac{Bb_1 b_2 \sqrt{\lambda}}{8\sqrt{\pi}|z|^{3/2}} \text{sign}(z).$$

Таким образом, при  $x = 0$  одноименные дислокации отталкиваются, а разноименные притягиваются.

## Лекция 7

# Двумерные ферромагнетики

Проблема, которую мы рассматриваем в настоящей лекции, связана с физикой двумерных ферромагнетиков. Речь идет о магнитных кристаллах, в которых магнитные атомы (атомы с ненулевым спином) собраны в слои, так что расстояние между соседними магнитными атомами в слое заметно меньше, чем расстояние между слоями. В силу того, что обменное взаимодействие между спинами быстро падает с ростом расстояния между атомами, в главном приближении можно пренебречь взаимодействием между спинами в различных слоях, в результате чего мы приходим к картине независимых слоев. О свойствах одного такого магнитного слоя, который можно считать двумерной системой, и пойдет речь.

### 7.1 Флуктуации направления намагниченности

Намагниченность является трехмерным вектором. Как мы уже знаем, в низкотемпературной (ферромагнитной) фазе абсолютная величина параметра порядка (намагниченности  $\mathbf{M}$ ) “замерзает” (то есть практически не флуктуирует), в то время как его направление остается “мягкой” переменной. Эта степень свободы характеризуется единичным вектором  $\mathbf{n}$ , направленным вдоль  $\mathbf{M}$ . Для единичного слоя вектор  $\mathbf{n}$  является функцией двумерного радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . В обменном приближении, которое работает на интересующих нас масштабах, магнитная энергия инвариантна относительно вращений в спиновом про-

пространстве. Поэтому магнитная энергия не может зависеть от самого вектора  $\mathbf{n}$ , а зависит от степени его неоднородности. Мы рассматриваем флуктуации  $\mathbf{n}$  на масштабах, больших атомного размера. Поэтому соответствующая энергия должна быть локальной функцией от градиента  $\mathbf{n}$ . В главном приближении она записывается следующим образом

$$\mathcal{F}_n = \int d^2r \frac{B}{2} \nabla n_\mu \nabla n_\mu. \quad (7.1)$$

Здесь  $B$  – коэффициент магнитной упругости.

Вообще говоря, к энергии (7.1) имеются различные поправки. Одна из них связана со спин-орбитальным взаимодействием, которое связывает между собой спиновые и пространственные переменные. Эта поправка может быть записана в следующем виде

$$\mathcal{F}_{so} = \int d^2r \frac{c}{2} (\mathbf{n} \mathbf{l})^2, \quad (7.2)$$

где  $\mathbf{l}$  – единичный вектор, перпендикулярный к слою. Кроме того, во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  имеется следующий вклад в энергию магнетика

$$\mathcal{F}_H = - \int d^2r M \mathbf{H} \mathbf{n}, \quad (7.3)$$

где  $M$  – абсолютная величина намагниченности. Еще одно взаимодействие, которое дает поправку к (7.1), связано с взаимодействием между намагниченностью соседних слоев. Энергия взаимодействия между двумя соседними слоями может быть записана в следующем виде

$$\mathcal{F}_3 = - \int d^2r U \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2, \quad (7.4)$$

где  $\mathbf{n}_{1,2}$  – направления намагниченности в этих слоях. Сравнивая вклады (7.2, 7.3, 7.4) с (7.1), мы находим следующие характерные длины, на которых эти вклады начинают играть существенную роль:

$$R_{so} = \sqrt{B/|c|}, \quad R_H = \sqrt{B/(MH)}, \quad R_U = \sqrt{B/U}. \quad (7.5)$$

Мы предполагаем, что все длины (7.5) намного превышают атомный размер (для  $R_{so}$  это гарантируется слабостью спин-орбитального взаимодействия, для  $R_H$  – это обычная ситуация, для  $R_U$  это связано со слабостью взаимодействия между слоями). В этом случае имеется широкий интервал масштабов, где градиентный член (7.1) играет главную роль.

Очевидно, что минимум энергии (7.1) достигается на однородном состоянии, когда  $\mathbf{n} = \text{const}$ . Если ограничиться этим вкладом в энергию, то направление  $\mathbf{n}$  остается неопределенным, что связано с изотропией в спиновом пространстве. Однако вклады (7.2, 7.3) нарушают эту

однородность и задают выделенное направление, вдоль которого должен быть направлен  $\mathbf{n}$ , чтобы минимизировать энергию магнетика. Во внешнем магнитном поле  $\mathbf{n}$  стремится ориентироваться вдоль  $\mathbf{H}$ . Что же касается члена (7.2), то его роль зависит от знака фактора  $c$ . Если  $c < 0$ , то минимум энергии достигается при  $\mathbf{n} = \mathbf{l}$  или  $\mathbf{n} = -\mathbf{l}$ , то есть остается двукратное вырождение. Этот случай называют обычно легкой осью. Если же  $c > 0$ , то минимум энергии достигается при условии перпендикулярности  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{l}$ . Этот случай называют легкой плоскостью, так как вектору выгодно лежать в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{l}$ . Тогда остается однопараметрическое вырождение основного состояния, связанное с произвольным направлением  $\mathbf{n}$  в этой плоскости. Взаимодействие слоев, которое описывается энергией (7.4), согласует между собой намагниченность различных слоев. Если  $U > 0$ , то намагниченности слоев выстраиваются параллельно, а в обратном случае  $U < 0$  намагниченности соседних слоев выстраиваются антипараллельно.

Далее мы обсуждаем роль флуктуаций в физике двумерных ферромагнетиков. Объекты, которые будут изучаться – корреляционные функции поля  $\mathbf{n}$ . Например, оказывается, что парная корреляционная функция

$$f(r) = \langle \mathbf{n}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \mathbf{n}(\mathbf{r}_1) \rangle, \quad (7.6)$$

равная единице при  $r = 0$ , стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Нас будет интересовать закон, по которому происходит разрушение корреляций  $\mathbf{n}$  при росте  $r$ . Далее мы развиваем теорию возмущений, которая позволяет регулярным образом исследовать корреляционные функции  $\mathbf{n}$  в некотором интервале масштабов. Кроме того, в эту схему могут быть легко включены и вклады в энергию (7.2, 7.3, 7.4).

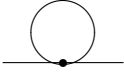
Направим ось  $Z$  вдоль равновесного значения  $\mathbf{n}$ , и введем его простейшую параметризацию

$$n_\mu = \left( \varphi_1, \varphi_2, \sqrt{1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2} \right), \quad (7.7)$$

Корреляционные функции  $\mathbf{n}$  определяются (функциональными) интегралами по  $\varphi_1, \varphi_2$ , взятыми с весом  $\propto \exp(-\mathcal{F}/T)$ . В предположении, что  $\mathbf{n}$  слабо флуктуирует около своего равновесного значения, естественно развить теорию возмущений по  $\varphi_1, \varphi_2$ . Первые члены разложения  $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$  по  $\varphi_1, \varphi_2$  имеют вид

$$\mathcal{F}_{(2)} = \int d^2r B/2 [(\nabla \varphi_1)^2 + (\nabla \varphi_2)^2], \quad (7.8)$$

$$\mathcal{F}_{(4)} = \int d^2r B/2 (\varphi_1 \nabla \varphi_1 + \varphi_2 \nabla \varphi_2)^2. \quad (7.9)$$

Рис. 7.1: Первая поправка к  $G$ .

Несложно также найти и разложение вкладов (7.2, 7.3, 7.4).

Затравочная парная корреляционная функция величин  $\varphi_1, \varphi_2$  определяется членом второго порядка (7.8). Явное выражение для затравочной парной корреляционной функции имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}) = \langle \varphi_1(\mathbf{r}) \varphi_1(0) \rangle_0 = \langle \varphi_2(\mathbf{r}) \varphi_2(0) \rangle_0 = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{T}{Bq^2}. \quad (7.10)$$

Это выражение логарифмически расходится на малых  $q$ . В рамках прямой теории возмущений эта расходимость должна обрезаться на (обратном) размере системы. Если принять во внимание вклад (7.3), то вместо (7.10) мы находим

$$G_0(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{T}{Bq^2 + MH}. \quad (7.11)$$

Теперь логарифмическая расходимость обрезается на  $R_H^{-1}$ , где  $R_H$  определен в (7.5). Аналогичную роль играет и член (7.2), за счет которого в знаменателе выражения (7.11) возникает дополнительное слагаемое  $\sim |c|$ .

Поправки к корреляционным функциям  $\varphi_1, \varphi_2$  происходят из членов взаимодействия, которые порождаются разложением  $\mathcal{F}_n$  по  $\varphi_1, \varphi_2$ . Член четвертого порядка выписан в (7.9), имеются также члены всех четных порядков. Первая флуктуационная поправка к  $G$  определяется диаграммой, приведенной на рисунке 7.1, где линии соответствуют (7.10), а факторы в вершинах определяются членом (7.9). Петля же на этом рисунке представляет первый вклад в “собственно-энергетическую” функцию, который определяется средними

$$\langle \varphi_1^2 \rangle_0, \quad \langle \varphi_1 \nabla \varphi_1 \rangle_0, \quad \langle (\nabla \varphi_1)^2 \rangle_0.$$

Член  $\langle \varphi_1 \nabla \varphi_1 \rangle_0$  равен нулю в силу симметрии, член  $\langle (\nabla \varphi_1)^2 \rangle_0$  определяется “ультрафиолетовым” интегралом по волновым векторам  $\mathbf{q}$ , то есть интегралом, сидящим на больших  $q$ . Этот интеграл, будучи вкладом в “собственно-энергетическую” функцию, дает вклад в знаменатель функции  $G$  типа вклада, который дает внешнее магнитное

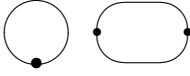


Рис. 7.2: Диаграммы, дающие ренормировку фактора при четверном члене.

поле, смотри (7.11). Наличие такого вклада означает нарушение вращательной инвариантности в пространстве намагниченности (оно задает в нем выделенное направление), чего в отсутствии внешнего поля быть не может. Поэтому на малых масштабах теория должна быть устроена так, чтобы среднее  $\langle (\nabla \varphi_1)^2 \rangle_0$  компенсировалось в ноль за счет аналогичных вкладов в “собственно-энергетическую функцию” за счет членов более высокого порядка теории возмущений. Мы заключаем, что только член  $\langle \varphi_1^2 \rangle_0$  будет давать реальный вклад в “собственно-энергетическую” функцию, который пропорционален  $q^2 \ln(\Lambda L_*)$ , где  $L_*$  – размер системы или одна из длин (7.5). Это дает логарифмическую ренормировку  $B$  в (7.10).

Аналогичным образом, имеет место логарифмическая ренормировка фактора в члене четвертого порядка, который затравочно определяется  $\mathcal{F}_{(4)}$ . Она возникает, например, за счет члена шестого порядка  $\mathcal{F}_{(6)}$ . Соответствующая поправка представлена первой диаграммой на рисунке 7.2, где “толстая” точка означает фактор, происходящий из  $\mathcal{F}_{(6)}$ . Кроме того, имеется вклад, квадратичный по  $\mathcal{F}_{(4)}$ , он представлен второй диаграммой на рисунке 7.2. Для факторов, стоящих в вершинах более высокого порядка, количество диаграмм, дающих их логарифмическую ренормировку, последовательно возрастает.

## 7.2 Ренорм-группа

Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой ренормировки бесконечного набора факторов. Причем, если их затравочные величины определяются только модулем  $B$ , то с учетом ренормировки их значения “разъезжаются”. В то же время ясно, что возникновение бесконечно большого набора вершин не отвечает физике дела, так как единственной значимой наблюдаемой величиной является модуль  $B$ . Причиной трудностей, с которыми мы столкнулись, является выбор объектов – корреляционных функций  $\varphi_1, \varphi_2$ , которые не являются вращательно инвариантными. Физические же свойства системы определяют вращательно инвариантные корреляционные функции типа (7.6). Из сказанного выше ясно, что и к этой функции имеются логарифмические

поправки. Но для их вычисления надо использовать процедуру, инвариантную относительно вращений. Такую процедуру можно сформулировать в терминах ренорм-группы, как это было предложено Поляковым [31] (смотри также [32]).

Основная идея Полякова заключается в том, чтобы разделять быстрые и медленные степени свободы вращательно инвариантным способом. А именно, на элементарном шаге РГ-процедуры вводится медленное поле  $\mathbf{n}'$  (представляющее выделенное направление, которое получается усреднением по быстрым флуктуациям), а поле  $\mathbf{n}$  раскладывается по (переменным в пространстве) осям, связанным с полем  $\mathbf{n}'$ . Чтобы осуществить эту программу, надо на промежуточном этапе ввести дополнительные (вспомогательные) поля  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , которые исчезнут из конечного ответа. Мы будем считать, что  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  – единичные взаимно ортогональные поля, перпендикулярные  $\mathbf{n}'$ . Отметим, что векторы  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}'\}$  составляют ортогональную матрицу, осуществляющую поворот из лабораторной системы координат в систему отсчета, вращающуюся вместе с  $\mathbf{n}'$ . Исходный единичный вектор  $\mathbf{n}$  можно записать в следующем виде

$$\mathbf{n} = \varphi_1 \mathbf{n}_1 + \varphi_2 \mathbf{n}_2 + \sqrt{1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2} \mathbf{n}', \quad (7.12)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  представляют быстрые степени свободы в упомянутой системе отсчета с переменными осями. Заметим, что все соотношения для  $\mathbf{n}'$  будут инвариантны относительно преобразования  $\mathbf{n}' \rightarrow \hat{O} \mathbf{n}'$  где  $\hat{O}$  – произвольная постоянная (не зависящая от координат) ортогональная матрица. Действительно, поворачивая также  $\mathbf{n}_{1,2} \rightarrow \hat{O} \mathbf{n}_{1,2}$ , мы находим преобразование  $\mathbf{n} \rightarrow \hat{O} \mathbf{n}$ , относительно которого инвариантна энергия (7.1). Это гарантирует, в частности, вращательную инвариантность длинноволновой энергии, которая получится после исключения быстрых степеней свободы.

Сделаем элементарный шаг РГ-процедуры, считая быстрыми полями  $\varphi_{1,2}$  в (7.12). Будем считать, что поле  $\varphi$  является суммой Фурье-гармоник с волновыми векторами  $\Lambda' < q < \Lambda$ , где  $\Lambda$  – исходная обрезка, а  $\Lambda'$  – новая обрезка. Имея в виду однопетлевое приближение, мы можем ограничиться членами второго порядка по  $\varphi_{1,2}$ . После подстановки (7.12) в (7.1) и разложения до второго порядка мы находим (опуская, как обычно, члены первого порядка по  $\varphi_{1,2}$ , как не производящие логарифмов)

$$\mathcal{F}_{\mathbf{n}} \rightarrow \mathcal{F}_{(2)} + \mathcal{F}_{\mathbf{n}'} + \mathcal{F}_{i1} + \mathcal{F}_{i2}.$$

Здесь  $\mathcal{F}_{(2)}$  определяется выражением (7.8), а остальные слагаемые име-



ют следующий вид:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{n}'} = \frac{B}{2} \int d^2 r (\nabla \mathbf{n}')^2, \quad (7.13)$$

$$\mathcal{F}_{i1} = B \int d^2 r [\nabla \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \varphi_1 \nabla \varphi_2 + \nabla \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1 \varphi_2 \nabla \varphi_1], \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i2} = \frac{B}{2} \int d^2 r \bigg[ & (\nabla \mathbf{n}_1)^2 \varphi_1^2 + (\nabla \mathbf{n}_2)^2 \varphi_2^2 \\ & + 2\varphi_1 \varphi_2 \nabla \mathbf{n}_1 \nabla \mathbf{n}_2 - (\nabla \mathbf{n}')^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \bigg]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Как и раньше, мы вводим “медленный” функционал Ландау в соответствии с определением

$$\exp(-\mathcal{F}'_{\mathbf{n}'} / T) = \int \mathcal{D}\varphi \exp(-\mathcal{F} / T).$$

Отбирая здесь логарифмические члены, мы находим

$$\mathcal{F}'_{\mathbf{n}'} - \mathcal{F}_{\mathbf{n}'} = \langle \mathcal{F}_{i2} \rangle_0 - \langle \mathcal{F}_{i1}^2 \rangle_0 / 2T, \quad (7.16)$$

где  $\langle \dots \rangle_0$  обозначает усреднение, определяемое вкладом второго порядка  $\mathcal{F}_{(2)}$ , выписанным в (7.8). Это ведет к выражениям (7.10) для корреляционных функций  $\varphi_{1,2}$ . Средние в (7.16) могут быть представлены суммой диаграмм, приведенных на рисунке 7.2. Соответствующие аналитические выражения пропорциональны следующим величинам

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1^2 \rangle &= G_0(0) = \frac{T}{2\pi B} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}, \\ \int d^2 r \partial_i G_0(\mathbf{r}) \partial_j G_0(\mathbf{r}) &= \frac{T^2}{4\pi B^2} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \delta_{ij}, \end{aligned}$$

Вычисляя все коэффициенты в (7.16), мы находим

$$\begin{aligned} -\langle \mathcal{F}_{i1}^2 \rangle_0 / 2T &= -\frac{T}{4\pi} \int d^2 r [(\nabla \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)^2 + (\nabla \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1)^2] \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}, \\ \langle \mathcal{F}_{i2} \rangle_0 &= \frac{T}{4\pi} \int d^2 r [(\nabla \mathbf{n}_1)^2 + (\nabla \mathbf{n}_2)^2 - 2(\nabla \mathbf{n}')^2] \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}. \end{aligned}$$

Далее мы используем тождество  $(\nabla \mathbf{n}_1)^2 - (\mathbf{n}_2 \nabla \mathbf{n}_1)^2 = (\mathbf{n}_1 \nabla \mathbf{n}')^2$ , следующее из ортонормированности  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}'\}$ , и аналогичное тождество для  $\mathbf{n}_2$ . Это приводит к комбинации  $(\mathbf{n}_1 \nabla \mathbf{n}')^2 + (\mathbf{n}_2 \nabla \mathbf{n}')^2$ , которая в силу тех же свойств сводится к  $(\nabla \mathbf{n}')^2$ . Собирая все вместе, мы получаем из (7.16)

$$\mathcal{F}'_{\mathbf{n}'} - \mathcal{F}_{\mathbf{n}'} = -\frac{T}{4\pi} \int d^2 r (\nabla \mathbf{n}')^2 \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}. \quad (7.17)$$

Обратим внимание на то, что вспомогательные поля  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  выпали из ответа, который выражается только через “медленное” поле  $\mathbf{n}'$ . Структура (7.17) совпадает с (7.1), то есть эта структура воспроизводится при ренормировке, как и следовало ожидать. Прделанный нами шаг РГ-процедуры можно интерпретировать, как возникновение поправки к модулю  $B$ :  $B' - B = -Bg\Delta\xi$ , где  $g = T/(2\pi B)$ ,  $\Delta\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ . Приведенное выражение для поправки к  $B$  справедливо при условии  $g\Delta\xi \ll 1$ . С другой стороны, мы должны считать  $\Delta\xi \gg 1$ . Поэтому условием применимости рассматриваемой теории является  $g \ll 1$ .

Произведя затем многошаговую процедуру исключения быстрых степеней свободы и переходя от разностей к непрерывному уравнению, мы получаем, что при уменьшении текущей обрезки  $\Lambda'$  безразмерная величина  $g$  подчиняется следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{dg}{d\xi} = g^2, \quad g = \frac{T}{2\pi B}, \quad (7.18)$$

где  $\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ . РГ-уравнение (7.18) показывает, что  $g$  является инвариантным зарядом. Однако, в отличие от тех случаев, которые мы рассматривали раньше (фазовые переходы второго рода в  $d = 4$  и смектики),  $g$  растет с ростом масштаба (то есть с ростом  $\xi$ ). Впервые такое поведение для инвариантного заряда было установлено в квантовой теории поля (для сильных взаимодействий), где оно называется асимптотической свободой (так как инвариантный заряд убывает с уменьшением масштаба). Решение уравнения (7.18) можно записать следующим образом

$$g = \frac{g_0}{1 - g_0\xi}, \quad (7.19)$$

где  $g_0$  – затравочное значение инвариантного заряда (его значение на малых масштабах,  $r \sim \Lambda^{-1}$ ).

Инвариантный заряд  $g$  играет роль безразмерной константы связи, и только при малых  $g$  оправдано разложение по  $\varphi$ , произведенное выше. Поэтому необходимым условием применимости теории является неравенство  $g_0 \ll 1$ . Из-за роста  $g$  с увеличением масштаба это условие нарушается на некотором масштабе  $R_c$ , который, как следует из (7.19), может быть оценен следующим образом

$$R_c \sim \Lambda^{-1} \exp(1/g_0). \quad (7.20)$$

Таким образом, значение  $R_c$  экспоненциально велико по  $1/g_0$ . На масштабах  $r \gtrsim R_c$  ренорм-группа, основанная на разложении по  $g$ , перестает работать.

Приступим теперь к анализу парной корреляционной функции (7.6). Очевидно, что эта функция равна 1 при  $\mathbf{r} = 0$ . Нас будет интересовать

поправка к этой единице при конечных  $r$ . Чтобы найти эту поправку, следует снова запустить РГ-процедуру. Сделаем элементарный шаг этой процедуры. Подставляя в качестве  $\mathbf{n}$  выражение (7.12) и раскладывая результат по  $\varphi$  до второго порядка, мы находим

$$\langle \mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{n}(0) \rangle \rightarrow \langle \mathbf{n}'(\mathbf{r})\mathbf{n}'(0) \{1 - [\varphi_1^2(\mathbf{r}) + \varphi_2^2(\mathbf{r}) + \varphi_1^2(0) - \varphi_2^2(0)] / 2\} \rangle.$$

Здесь мы учли, что быстрые переменные  $\varphi$  практически не коррелируют на масштабе  $r$ , что устраняет члены с  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ . Усреднение можно независимо производить по быстрым и по медленным переменным. Усреднение по быстрым переменным сводится к замене  $\langle \varphi_1^2 \rangle \rightarrow g \ln(\Lambda/\Lambda')$ . Таким образом, мы получаем

$$\langle \mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{n}(0) \rangle \rightarrow [1 - 2g \ln(\Lambda/\Lambda')] \langle \mathbf{n}'(\mathbf{r})\mathbf{n}'(0) \rangle.$$

При многошаговой процедуре мы приходим к

$$\langle \mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{n}(0) \rangle \rightarrow Z \langle \mathbf{n}'(\mathbf{r})\mathbf{n}'(0) \rangle,$$

где  $Z$  подчиняется уравнению  $dZ/d\xi = -2gZ$ . Его решение имеет вид  $Z = (1 - g_0\xi)^2$ , где мы использовали выражение (7.19). Чтобы найти  $\langle \mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{n}(0) \rangle$ , надо ренормировать  $Z$  до  $\Lambda' \sim r^{-1}$ , после чего  $\varphi$  начинают коррелировать на масштабе  $r$ . Но тогда уже  $\langle \mathbf{n}'(\mathbf{r})\mathbf{n}'(0) \rangle$  можно заменить на единицу. Таким образом, мы находим окончательно

$$\langle \mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{n}(0) \rangle = [1 - g_0 \ln(\Lambda r)]^2. \quad (7.21)$$

Конечно, это выражение справедливо только при условии  $g \ll 1$ .

Вигман [33] нашел ответ для спектра возбуждений в задаче, соответствующей (7.1), в пространстве  $1 + 1$ , который демонстрирует наличие у возбуждений массы. Поэтому можно ожидать, что корреляционные функции  $\mathbf{n}$  на масштабах  $r > R_c$  начинают экспоненциально спадать, по закону  $\exp(-Cr/R_c)$ , где  $C$  – численный фактор. На первый взгляд, такое поведение противоречит теореме Голдстоуна, которая утверждает, что при спонтанном нарушении симметрии (в нашем случае вращательной) должна сохраняться мягкая степень свободы (наше  $\mathbf{n}$ ), которая имеет степенные корреляции. Однако это противоречие является лишь кажущимся, так как реально никакого спонтанного нарушения вращательной симметрии в двумерном ферромагнетике не происходит, поскольку за счет сильных флуктуаций  $\langle \mathbf{n} \rangle = 0$ , то есть отсутствует выделенное направление в спиновом пространстве.

Условие  $\langle \mathbf{n} \rangle = 0$  означает, что в двумерном ферромагнетике средняя намагниченность равна нулю. Другими словами, за счет сильных флуктуаций  $\mathbf{n}$  магнетик становится парамагнетиком, физические

свойства которого следует характеризовать магнитной восприимчивостью  $\chi$ . Оценим величину этой магнитной восприимчивости. Если  $\langle \mathbf{n} \rangle = 0$ , то первый нетривиальный вклад в свободную энергию двумерного ферромагнетика, связанный с внешним магнитным полем, равен

$$F = -\frac{M^2}{2T} H_\alpha H_\beta \int d^2 r_1 d^2 r_2 \langle n_\alpha(\mathbf{r}_1) n_\beta(\mathbf{r}_2) \rangle.$$

Поскольку единичный вектор  $\mathbf{n}$ , как мы уже установили, коррелирует на длине  $R_c$ , это выражение можно оценить, как  $F \sim M^2 H^2 T^{-1} S R_c^2$ , где  $S$  – площадь слоя. Таким образом,  $\chi \sim M^2 T^{-1} R_c^2$ .

Все сказанное выше справедливо, если  $R_c$  меньше всех масштабов  $R_{so}$ ,  $R_H$ ,  $R_U$ . В противном случае флуктуации  $\mathbf{n}$  будут подавлены на масштабах больших, чем  $\min\{R_{so}, R_H, R_U\}$ . На этих масштабах константа связи  $g$  “замерзает”, имея значение меньше единицы, то есть мы остаемся в области применимости теории возмущений.

## 7.3 Большие $N$

Чтобы представить себе поведение корреляционных функций  $\mathbf{n}$  на всех масштабах, можно рассмотреть случай большого числа  $N$  компонент единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Этот случай допускает исследование, которое не предполагает малости инвариантного заряда. Ниже мы приводим его основные шаги.

Прежде всего, вместо явного учета условия  $\mathbf{n}^2 = 1$  удобно считать все  $N$  компонент вектора  $\mathbf{n}$  независимыми (и интегрировать по всем этим компонентам при вычислении корреляционных функций), а условие  $\mathbf{n}^2 = 1$  ввести при помощи соответствующей функциональной  $\delta$ -функции. Эта  $\delta$ -функция может быть преобразована в интеграл по вспомогательному полю  $\mu$  от соответствующей экспоненты. В результате производящий функционал корреляционных функций  $\mathbf{n}$  записывается в следующем виде

$$\mathcal{Z}(\mathbf{y}) = \int \mathcal{D}\mathbf{n} \mathcal{D}\mu \exp \left( -\mathcal{H} + \int d^2 r \mathbf{y} \mathbf{n} \right), \quad (7.22)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi g_0} \int d^2 r [(\nabla \mathbf{n})^2 + \mu \mathbf{n}^2 - \mu]. \quad (7.23)$$

Строго говоря, поле  $\mu$  является чисто мнимым, то есть интегрирование по  $\mu$  в (7.22) идет вдоль мнимой оси.

Проинтегрируем сначала по  $\mathbf{n}$ , и только потом по  $\mu$ . Первое интегрирование является Гауссовым, и потому ответ выражается через

парную корреляционную функцию  $\mathbf{n}$  (при данном  $\mu$ ). Уравнение на эту корреляционную функцию имеет следующий вид

$$[\mu(\mathbf{r}_1) - \nabla_1^2] \langle n_a(\mathbf{r}_1) n_b(\mathbf{r}_2) \rangle = 2\pi g_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta_{ab}. \quad (7.24)$$

Как мы увидим ниже, поле  $\mu$  слабо (в меру величины  $N$ ) флуктуирует вблизи своего среднего значения  $\mu_0$ . Следовательно, в главном приближении можно заменить  $\mu$  в (7.24) на  $\mu_0$ . Тогда мы легко найдем решение

$$\langle n_a(\mathbf{r}) n_b(0) \rangle = \int \frac{d^2 q}{2\pi} \frac{g_0}{q^2 + \mu_0} \delta_{ab} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) = g_0 \delta_{ab} K_0(\sqrt{\mu_0} r). \quad (7.25)$$

Мы видим, что корреляции экспоненциально затухают на масштабах  $r > 1/\sqrt{\mu_0}$ , то есть  $1/\sqrt{\mu_0}$  играет роль корреляционной длины  $R_c$ . Иногда  $\sqrt{\mu_0}$  называют спонтанной массой, имея в виду квантово-полевою аналогию.

Теперь мы должны обеспечить условие  $\mathbf{n}^2 = 1$ , которое и определит нам величину  $\mu_0$ . Используя (7.25), мы получаем из  $\mathbf{n}^2 = 1$  следующее соотношение

$$g_0 N \ln \frac{\Lambda}{\sqrt{\mu_0}} = 1. \quad (7.26)$$

Таким образом, мы находим, что в парную корреляционную функцию (7.25) входит величина

$$\sqrt{\mu_0} = \Lambda \exp\left(-\frac{1}{g_0 N}\right).$$

Мы видим, что условие  $\sqrt{\mu_0} \ll \Lambda$ , которое гарантирует, что корреляционная длина  $R_c$  является много большей, чем  $\Lambda^{-1}$ , совместно с  $N \gg 1$ , если  $g_0 N \ll 1$ . При выполнении этих условий наше рассмотрение целиком остается в области больших масштабов, что необходимо для макроскопической теории.

Поскольку ответ (7.25) был получен в приближении “среднего поля” (когда флуктуации  $\mu$  не учитывались), мы должны теперь оправдать это приближение. Для этой цели удобно ввести функционал  $\mathcal{S}$ :

$$\exp(-\mathcal{S}) = \int \mathcal{D}\mathbf{n} \exp(-\mathcal{H}), \quad (7.27)$$

определяющий статистику поля  $\mu$ . Функционал  $\mathcal{S}$  выражается через парную корреляционную функцию  $\mathbf{n}$  (при данном  $\mu$ ). Скажем, член второго порядка по флуктуациям  $\mu$  в функционале (7.27) равен

$$\mathcal{S}^{(2)} = -\frac{1}{16\pi^2 g_0^2} \int d^2 r_1 d^2 r_2 \mu(\mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_2) \langle n_a(\mathbf{r}_1) n_b(\mathbf{r}_2) \rangle^2. \quad (7.28)$$

Как следует из (7.25), характерное значение  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  в (7.28) равно  $\mu_0^{-1/2}$ . Поэтому вклад (7.28) может быть оценен, как  $N \int d^2r \mu^2 / \mu_0$ . Мы видим фактор  $N$  в этом интеграле. Такой же фактор появляется и в членах более высокого порядка в функционале  $\mathcal{S}$ . Вследствие этого при  $N \gg 1$  флуктуации  $\mu$  оказываются действительно подавленными.

## Задачи

### Задача 7.1

При наличии внешнего поля  $\mathbf{H}$  имеется следующий вклад в энергию магнетика

$$\mathcal{F}_H = - \int d^2r M \mathbf{H} \mathbf{n}, \quad (7.29)$$

где  $M$  – абсолютное значение намагниченности. Найти РГ-уравнение для фактора  $M$ , относящегося к ферромагнитному слою, свойства которого описываются (7.1).

### Решение задачи 7.1

Мы будем использовать ту же схему, что и в тексте лекции. А именно, разделим быстрые и медленные переменные в соответствии с (7.12). Раскладывая затем  $\mathbf{n}$  по  $\varphi_{1,2}$ , мы находим следующий член второго порядка

$$\mathcal{F}_H^{(2)} = \int d^2r M H n'_3 \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2}, \quad (7.30)$$

Мы находим из (7.30) после интегрирования по быстрым переменным следующий логарифмический вклад в медленный функционал Ландау

$$\langle \mathcal{F}_H^{(2)} \rangle \propto \int d^2r \mathbf{H} \mathbf{n}'.$$

Это единственный в однопетлевом приближении логарифмический вклад. Таким образом, структура (7.29) воспроизводится при ренормировке. Вычисляя явно коэффициент при логарифме и переходя затем к РГ-уравнениям, мы находим

$$\frac{dM}{d\xi} = -gM, \quad M \propto g^{-1}.$$

Отрицательный знак в этом уравнении означает, что эффективная величина намагниченности уменьшается за счет мелкомасштабных флуктуаций направления намагниченности. Представленный закон ренормировки работает для масштабов  $R_H < r < \Lambda^{-1}$ .

## Лекция 8

# Физика мембран

В настоящей лекции мы рассмотрим свойства мембран, которые спонтанно возникают во многих органических растворах. Мембраны являются пленками, представляющими собой двойной слой липидных молекул и имеют, следовательно, толщину порядка молекулярного размера. Такие мембраны широко распространены в биологических системах. Например, мембраны являются основным строительным материалом клеточных оболочек, а также таких объектов, как красные кровяные тельца. Упомянем также, что некоторые жидкокристаллические фазы, которые называются лиотропными, представляют собой раствор, содержащий упорядоченную (в той или иной мере) систему мембран [34, 35].

Во избежание недоразумений подчеркнем, что мы будем считать разные мембраны невзаимодействующими, что позволяет рассматривать их отдельно, независимо друг от друга. Это оправдано, например, в лиотропных жидких кристаллах, где расстояние между мембранами много больше их толщины. Таким образом, теория лиотропных жидких кристаллов должна строиться в два этапа: сначала надо изучить свойства отдельно взятой мембраны, а затем уже принять во внимание их взаимодействие. Взаимодействие между мембранами не будет рассматриваться здесь, так как оно представляет собой отдельную проблему, выходящую за рамки настоящего курса.

### 8.1 Энергия мембраны

Как мы уже отметили, мембраны имеют малую толщину. В то же время продольные размеры мембран могут быть весьма значительными. Поэтому при изучении явлений, происходящих на макроскопических

масштабах, мембраны могут считаться двумерными объектами. Таким образом, с макроскопической точки зрения положение мембраны в пространстве определяется некоторой поверхностью, которая может быть как ограниченной, так и замкнутой. В последнем случае мембрана называется везикулой (vesicle). Везикула может иметь разные топологические свойства. В простейшем случае она имеет топологию сферы. Однако возможными являются и поверхности, которые получаются добавлением “ручек” к поверхности топологии сферы (тор и так далее) [36]. Энергия мембраны может быть записана, как двумерный интеграл, идущий по определяющей ее форму поверхности. Последнее утверждение справедливо при отсутствии механизмов, приводящих к нелокальным вкладам в энергию. Это заведомо справедливо для изотропных мембран (в которых отсутствует внутренний порядок, как в жидкостях). Только такие мембраны и будут здесь обсуждаться.

Характерной особенностью мембран является аномально малая величина поверхностного натяжения. Это свойство легко понять, если представить себе мембрану в форме листа. При изменении расстояний между составляющими мембрану молекулами площадь листа изменяется. Таким образом, площадь мембраны  $S$  является свободным параметром, и в равновесии выполняется условие  $dF/dS = 0$ , где  $F$  – свободная энергия мембраны. Но это условие как раз и означает нулевую величину поверхностного натяжения. Конечно, флуктуационно может возникать ненулевое поверхностное натяжение, для этого должно появиться отклонение плотности мембраны (числа молекул на единицу поверхности) от равновесного значения (соответствующего нулевому поверхностному натяжению). Поверхностное же натяжение везикулы в силу известных ограничений (например, из-за фиксированной величины объема жидкости внутри везикулы с топологией сферы) может оказаться и ненулевым даже в основном состоянии. Но в любом случае величина этого поверхностного натяжения является чрезвычайно малой.

Из-за аномально малого значения поверхностного натяжения мембраны весьма “мягкими” оказываются флуктуации, связанные с изменением формы мембраны. Для их описания следует ввести энергию (функционал Ландау), который “знает” о кривизне мембраны. Мы будем рассматривать только симметричные мембраны (обе стороны такой мембраны эквивалентны). Тогда в разложении поверхностной плотности энергии по кривизне могут присутствовать только четные члены. Главными вкладами в энергию мембраны являются следующие



два слагаемых [37, 38]

$$\mathcal{F}_H = \frac{\kappa}{2} \int dS \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2, \quad (8.1)$$

$$\mathcal{F}_G = \bar{\kappa} \int dS \frac{1}{R_1 R_2}, \quad (8.2)$$

где интегрирование производится по поверхности, определяющей форму мембраны. Здесь  $R_1$  и  $R_2$  – локальные радиусы кривизны мембраны, а факторы  $\kappa$  и  $\bar{\kappa}$  называются изгибными модулями (или модулями Хельфриха). Произведение  $R_1^{-1} R_2^{-1}$  является Гауссовой кривизной поверхности, а комбинация  $R_1^{-1} + R_2^{-1}$  обычно называется ее средней кривизной.

Заметим, что вклад в энергию (8.2) является топологическим инвариантом. Действительно, для замкнутой поверхности интеграл по ней от ее Гауссовой кривизны равен  $4\pi(1 - g_e)$ , где  $g_e$  – так называемый генус, то есть число “ручек”, которое должно быть присоединено к сфере для того, чтобы получить поверхность данной топологической структуры (например, для тора  $g_e = 1$ ). Это число (генус) зависит от топологии, но не зависит от конкретной формы поверхности. Поэтому при непрерывных деформациях везикулы, не затрагивающих ее топологии, вклад в энергию (8.2) не играет никакой роли. С другой стороны, можно поставить вопрос о деформациях везикул, приводящих к изменению их топологии (генуса). Для такого рода процессов вклад в энергию (8.2) будет играть существенную роль.

Как мы уже упомянули, в дополнение к энергии (8.1,8.2), связанной с кривизной мембраны, следует ввести энергию, связанную с флуктуациями поверхностной плотности молекул  $n_s$ , составляющих мембрану. Мы будем отсчитывать  $n_s$  от равновесного значения  $n_0$ , соответствующего нулевому поверхностному натяжению. Тогда главный вклад в энергию, связанный с флуктуациями  $n_s$ , имеет следующий вид

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{2} \int dS B \nu^2. \quad (8.3)$$

Здесь  $\nu = (n_s - n_0)/n_0$  является относительным отклонением поверхностной плотности молекул от равновесного значения, а фактор  $B$  имеет смысл обратной сжимаемости мембраны. Поясним связь энергии (8.3) с поверхностным натяжением. Для этого предположим, что мембрана является плоским листом, а также является однородной. Тогда  $\mathcal{F}_n = (SB/2)\nu^2$ , где  $S$  – площадь мембраны. Пусть величина этой площади изменяется на  $dS$ . Тогда изменение  $n_s$  можно найти из соотношения  $n_s = N/S$ , где  $N$  – число молекул мембраны (которое фиксировано). Вычисляя затем изменение энергии, мы находим для поверхностного натяжения  $\sigma = d\mathcal{F}_n/dS = -B\nu$ . Эта величина действительно

обращается в ноль при  $n_s = n_0$ , а знак минус в этом выражении связан с тем, что поверхностное натяжение мембраны растет при увеличении ее плотности.

Для мембранного листа энергия (8.1) достигает минимума в случае плоской геометрии. Поэтому по крайней мере небольшие части мембраны можно считать плоскими. При нулевом поверхностном натяжении тепловые флуктуации приводят к тому, что разрушаются корреляции ориентаций мембраны на расстояниях больше, чем некоторый масштаб, который называется персистентной длиной [39]. Ниже мы оценим персистентную длину  $R_c$ . Здесь же только отметим, что на шкалах больших, чем персистентная длина, мембрана ни в каком приближении не может считаться плоской: она обладает сложной формой, хаотически меняющейся со временем.

Приступим к количественному анализу флуктуаций формы мембраны. Для этого необходимо прежде всего ввести некоторую параметризацию поверхности, которая задает форму мембраны. Имея в виду описание везикул, которые могут иметь довольно сложную форму, мы стартуем с максимально общей параметризации поверхности  $\Phi(\mathbf{r}) = 0$ , где  $\Phi$  – некоторая функция трех координат. Тогда для единичного вектора, перпендикулярного к поверхности, имеет место выражение

$$l_i = \frac{\nabla_i \Phi}{|\nabla \Phi|}. \quad (8.4)$$

Величина  $\mathbf{l}$ , формально определенная на всем пространстве, имеет смысл, конечно, только на поверхности  $\Phi = 0$ . С помощью введенных величин энергия (8.1,8.2) переписывается следующим образом

$$\int d^3r \delta(\Phi) |\nabla \Phi| \left\{ \frac{\kappa}{2} (\nabla_i l_i)^2 + \frac{\bar{\kappa}}{2} [(\nabla_i l_i)^2 - \nabla_i l_k \nabla_k l_i] \right\}. \quad (8.5)$$

Отметим, что выражения (8.4,8.5) инвариантны относительно замены  $\Phi \rightarrow f(\Phi)$ , где  $f$  – произвольная функция, удовлетворяющая условию  $f(0) = 0$ . Для выражения (8.4) это проверяется непосредственно. Для выражения (8.5) это следует из двух свойств. Во-первых, относительно замены  $\Phi \rightarrow f(\Phi)$  инвариантен множитель  $\delta(\Phi) |\nabla \Phi|$ . Во-вторых, в (8.5) входят производные от  $\mathbf{l}$  только вдоль поверхности, которые не зависят от способа продолжения  $\mathbf{l}$  в направлении, перпендикулярном поверхности. Последнее свойство следует из того, что  $\nabla_i$  в (8.5) может быть заменено на  $\nabla_i^\perp = \nabla_i - l_i l_j \nabla_j$ . Например,  $\nabla_i^\perp l_i = \nabla_i l_i$  в силу условия  $\mathbf{l}^2 = 1$ .

Далее мы изучаем флуктуации, считая, что в нулевом приближении мембрану можно считать плоской, то есть мы будем изучать мембранный лист или везикулу на масштабах, гораздо меньше ее размеров. Выберем систему координат таким образом, чтобы равновесное

положение мембраны совпадало с плоскостью  $X - Y$ . Тогда естественно параметризовать отклонения мембраны от равновесной формы ее смещением  $u$  вдоль оси  $Z$ , это смещение является функцией  $x, y$ . Соответствующая функция  $\Phi$  записывается следующим образом

$$\Phi = z - u(x, y). \quad (8.6)$$

Отметим аналогию с описанием смектиков (смотри лекцию 6): мы параметризуем мембрану, как единичный смектический слой. Такого сорта параметризация может быть использована для произвольной пленки (толщина которой является пренебрежимо малой).

В терминах параметризации (8.6) единичный вектор (8.4), перпендикулярный к поверхности, имеет следующие компоненты

$$l_\alpha = -\frac{\nabla_\alpha u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}}, \quad l_z = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}}. \quad (8.7)$$

Здесь греческий индекс  $\alpha$  пробегает два значения  $x$  и  $y$ . Подставляя выражение (8.7) в (8.5), мы находим

$$\mathcal{F}_H = \frac{\kappa}{2} \int dx dy \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \left[ \nabla_\alpha \frac{\nabla_\alpha u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right]^2. \quad (8.8)$$

Заметим, что выражение (8.8) не предполагает малости флуктуаций  $u$ , то есть является формально точным. Однако это выражение предполагает отсутствие “перегибов”, то есть однозначность функции  $u(x, y)$ , которую гарантирует только малость флуктуаций  $u$ .

Предположим теперь, что поверхностное натяжение мембраны  $\sigma$  не равно нулю. Например, можно представить себе, что мембрана натянута (как мыльная пленка) на некоторую рамку, которая имеет площадь несколько больше, чем равновесная площадь мембраны. Тогда мембрана будет растянута и ее поверхностное натяжение  $\sigma = -B\nu$  будет положительным. Поскольку флуктуации происходят при постоянном числе молекул  $N = \int dS n$ , для их описания надо использовать энергию (8.3), в которую надо включить  $N$  с Лагранжевым множителем, который мы обозначаем  $\lambda$ :

$$\mathcal{F}_n = \int dS \left[ \frac{1}{2} B \frac{(n - n_0)^2}{n_0^2} - \lambda n \right]. \quad (8.9)$$

Флуктуации формы мембраны являются относительно медленными, и потому  $n$  успевает подстраиваться под текущую форму мембраны, оставаясь при этом однородным. Поэтому следует взять минимум энергии (8.9) по  $n$ , что дает  $\lambda = B(n - n_0)/n_0^2 = -\sigma/n_0$ . Подставляя это

выражение в (8.9) и учитывая предполагаемую малость  $\nu$ , мы получаем эффективную энергию  $\mathcal{F}_\sigma = \sigma S$ . В терминах смещения  $u$

$$\mathcal{F}_\sigma = \sigma \int dx dy \sqrt{1 + (\nabla u)^2}. \quad (8.10)$$

## 8.2 Флуктуации мембран

Стартуя с выражения (8.8), можно сформулировать теорию возмущений по  $u$  для вычисления различных корреляционных функций. При этом вклад  $\mathcal{F}_G$ , как топологический инвариант, не входит в эту теорию возмущений. Раскладывая энергию (8.8), мы находим член второго порядка

$$\mathcal{F}^{(2)} = \frac{\kappa}{2} \int dx dy (\nabla^2 u)^2, \quad (8.11)$$

который определяет затравочное значение корреляционных функций  $u$ . Они сводятся к парной корреляционной функции

$$\langle u(x, y) u(0, 0) \rangle_0 = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{T}{\kappa q^4} \exp(iq_x x + iq_y y). \quad (8.12)$$

Обратим внимание на то, что интеграл в (8.12) расходится на малых  $q$ . Это означает, что основной вклад в корреляционную функцию

$$\langle u(x, y) u(0, 0) \rangle$$

вносят самые крупномасштабные флуктуации, с волновыми векторами порядка обратного продольного размера мембраны.

Оценим, основываясь на (8.11), персистентную длину  $R_c$ . Для этого мы должны рассмотреть корреляционную функцию  $\langle \mathbf{l}(\mathbf{r}_1) \mathbf{l}(\mathbf{r}_2) \rangle$ , которая определяет корреляции ориентации различных участков мембраны, и найти характерную длину, на которой эта корреляция исчезает. Подставим выражения (8.7) в  $\langle \mathbf{l}(\mathbf{r}_1) \mathbf{l}(\mathbf{r}_2) \rangle$  и разложим результат по  $u$  (считая флуктуации  $u$  малыми). Первые два члена разложения имеют вид

$$\langle \mathbf{l}(\mathbf{r}_1) \mathbf{l}(\mathbf{r}_2) \rangle \approx 1 - \frac{1}{2} \left\langle [\nabla_\alpha u(x_1, y_1) - \nabla_\alpha u(x_2, y_2)]^2 \right\rangle. \quad (8.13)$$

Используя теперь выражение (8.12) для парной корреляционной функции, мы находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\langle [\nabla_\alpha u(x, y) - \nabla_\alpha u(0, 0)]^2 \right\rangle_0 \\ &= \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{T}{\kappa q^2} (1 - e^{iq_x x + iq_y y}) \approx \frac{T}{2\pi\kappa} \ln \left( \Lambda \sqrt{x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Здесь  $\Lambda$  – ультрафиолетовая обрезка (обратная толщина мембраны). Обратим внимание на то, что в данном выражении нет никаких расходимостей на малых  $q$ . Теория возмущений для корреляционной функции  $\langle \mathbf{l}(\mathbf{r}_1) \mathbf{l}(\mathbf{r}_2) \rangle$  разрушается тогда, когда поправка (8.14) становится порядка единицы. Отсюда мы получаем для персистентной длины  $R_c$  следующую оценку [39]

$$\ln(\Lambda R_c) \sim \kappa/T. \quad (8.15)$$

Оценка (8.15) имеет смысл при малом значении  $T/\kappa$  (иначе отсутствует область применимости теории возмущений). В дальнейшем отношение  $T/\kappa$  предполагается малым. Это условие выполняется для реальных мембран, где  $T/\kappa \sim 10^{-2}$ .

Если поверхностное натяжение мембраны отлично от нуля, то необходимо включить в рассмотрение эффективную энергию (8.10). Во втором порядке по  $u$  она дает

$$\mathcal{F}_\sigma^{(2)} = \frac{\sigma}{2} \int dx dy (\nabla u)^2. \quad (8.16)$$

Добавляя вклад (8.16) к энергии (8.11) мы находим энергию второго порядка, которая дает

$$\langle u(x, y) u(0, 0) \rangle_0 = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{T}{\kappa q^4 + \sigma q^2} \exp(iq_x x + iq_y y), \quad (8.17)$$

вместо (8.12). В этом выражении сохраняется расходимость на малых  $q$ , однако она теперь является только логарифмической. Другими словами, наличие поверхностного натяжения подавляет флуктуации мембраны на больших масштабах.

Чтобы построить регулярную теорию возмущений, необходимо принять во внимание высшие члены разложения энергии (8.8) по  $u$ . Следующим за (8.11) является вклад четвертого порядка

$$\mathcal{F}^{(4)} = \frac{\kappa}{2} \int dx dy \left\{ \frac{1}{2} (\nabla u)^2 (\nabla^2 u)^2 + \nabla_\alpha u (\nabla u)^2 \nabla_\alpha \nabla^2 u \right\}, \quad (8.18)$$

где во втором члене мы проинтегрировали по частям. Вклад (8.18) порождает поправки к корреляционным функциям  $u$ , которые задаются диаграммами с четверными вершинами. Каждой вершине сопоставляется множитель, определяемый (8.18), а каждой линии сопоставляется затравочная парная корреляционная функция  $u$  (8.12) или (8.17).

Первая поправка к парной корреляционной функции  $u$  определяется однопетлевой диаграммой, приведенной на рисунке 8.1, где линии представляют собой затравочное значение парной корреляционной

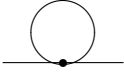


Рис. 8.1: Первая поправка к парной корреляционной функции  $u$ .

функции  $u$ . Как обычно, петлю на этой диаграмме можно интерпретировать, как вклад в собственно-энергетическую функцию  $\Sigma$ , которая определяется в соответствии с выражением

$$\langle u(x, y)u(0, 0) \rangle = \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{T}{\kappa q^4 + \sigma q^2 - \Sigma} \exp(iq_x x + iq_y y), \quad (8.19)$$

вместо (8.17). Выражение для собственно-энергетической функции, соответствующее приведенной однопетлевой диаграмме, имеет вид

$$\Sigma(q) = \frac{3}{2} \kappa q^4 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{T k^2}{\kappa k^4 + \sigma k^2} + \frac{3}{2} \kappa q^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{T k^4}{\kappa k^4 + \sigma k^2}. \quad (8.20)$$

Сравнивая (8.20) с (8.19), мы заключаем, что первое слагаемое в (8.20) дает ренормировку модуля  $\kappa$ , которая носит логарифмический характер:

$$\Delta \kappa = -\frac{3T}{4\pi} \ln(\Lambda R_\sigma), \quad R_\sigma = \sqrt{\kappa/\sigma}. \quad (8.21)$$

Второе же слагаемое в (8.20) дает вклад в поверхностное натяжение. Соответствующий вклад является ультрафиолетовым, то есть определяется большими волновыми векторами, а потому не может быть вычислен в рамках длинноволновой теории. Здесь ситуация оказывается такой же, как и для фазовых переходов, где точка перехода не может быть вычислена в рамках длинноволновой теории. Точно также, как ультрафиолетовые вклады включались в переопределение точки перехода, ультрафиолетовые вклады (типа найденного выше) должны включаться в переопределение поверхностного натяжения мембраны.

Аналогичным образом могут быть проанализированы и многопетлевые вклады в  $\Sigma$ , обязанные члену (8.18). Все они содержат логарифмические слагаемые, которые можно интерпретировать, как ренормировку  $\kappa$ . Далее, мы должны принять во внимание высшие члены разложения (8.8) по  $u$  (члены шестого, восьмого и так далее порядков). Они приведут к дополнительным поправкам к парной корреляционной функции  $u$ , которые также содержат логарифмические слагаемые. Таким образом, возникает проблема суммирования главной логарифмической последовательности вкладов в корреляционные

функции. Естественным путем решения подобного рода задач является ренорм-группа. В данном случае ситуация осложняется наличием бесконечного набора вершин. Эта ситуация напоминает проблему с двумерным ферромагнетиком (смотри лекцию 7). Там специально надо было заботиться о вращательно инвариантном способе разделения быстрых и медленных переменных. К счастью, для мембран такой проблемы не возникает. Это связано с тем, что при произвольном способе разделения переменных на быстрые и медленные после интегрирования по быстрым переменным сохраняется симметрия функционала Ландау относительно перепараметризации  $\Phi \rightarrow f(\Phi)$ , которая однозначно диктует форму функционала (8.5).

Поясним это утверждение. Прежде всего, произведем элементарный шаг РГ-процедуры, разделив переменные на быструю и медленную компоненты и проинтегрировав по последней. Это можно сделать прямо на языке функции  $\Phi$ , одним из возможных реализаций которой является (8.6). А именно, функционал Ландау для медленной части  $\Phi'$  записывается в виде интеграла по быстрому полю  $\tilde{\Phi}$ :

$$\exp \left[ -\frac{\mathcal{F}'(\Phi')}{T} \right] = \int \mathcal{D}\tilde{\Phi} \exp \left[ -\frac{\mathcal{F}(\Phi' + \tilde{\Phi})}{T} \right]. \quad (8.22)$$

Далее, функционал Ландау  $\mathcal{F}(\Phi' + \tilde{\Phi})$  инвариантен относительно замены  $\Phi' + \tilde{\Phi} \rightarrow f(\Phi' + \tilde{\Phi})$ . Производя эту замену и переходя от интегрирования по  $\tilde{\Phi}$  к интегрированию по  $\tilde{f} = f(\Phi' + \tilde{\Phi}) - f(\Phi')$ , мы получаем в правой части (8.22) интеграл, который сводится к  $\exp\{-\mathcal{F}'[f(\Phi')]/T\}$ . Таким образом, медленный функционал Ландау  $\mathcal{F}'(\Phi')$  также оказывается инвариантным относительно замены  $\Phi' \rightarrow f(\Phi')$ . Учитывая также, что при интегрировании по быстрым полям получается локальное выражение, мы приходим к выводу, что  $\mathcal{F}'(\Phi')$  является интегралом по поверхности  $\Phi' = 0$  от производных от  $\mathbf{l}$  вдоль поверхности, так как только такие объекты инвариантны относительно замены  $\Phi' \rightarrow f(\Phi')$ . Во втором порядке по обратной кривизне (когда в  $\mathcal{F}$  имеются члены, содержащие две пространственные производные от  $\mathbf{l}$ ) возможные вклады в функционал Ландау исчерпываются двумя, перечисленными в (8.5). Таким образом, выражение (8.5) автоматически воспроизводится при исключении быстрых переменных.

Это свойство сильно облегчает получение РГ-уравнений. Во-первых, имеется только два модуля,  $\kappa$  и  $\bar{\kappa}$ , для которых эти РГ-уравнения должны быть найдены. А во-вторых, достаточно ограничиться низшими членами разложения функционала Ландау (8.8) по  $u$ . Это означает, что в соотношении (8.22) в  $\mathcal{F}'$  достаточно удержать члены второго порядка по  $u'$ , а в  $\mathcal{F}$  достаточно удержать члены второго порядка как по

$u'$ , так и по  $\tilde{u}$ . В результате мы получаем

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{(2)}(u) + \mathcal{F}^{(2)}(u') + \mathcal{F}_{int},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{int} = & \frac{\kappa}{2} \int dx dy \left[ \frac{1}{2} (\nabla \tilde{u})^2 (\nabla^2 u')^2 + \nabla_\alpha u' (\nabla \tilde{u})^2 \nabla_\alpha \nabla^2 u' \right. \\ & \left. + 2 \nabla_\alpha \tilde{u} (\nabla u' \nabla \tilde{u}) \nabla_\alpha \nabla^2 u' \right] + \dots, \end{aligned} \quad (8.23)$$

а многоточием обозначены несущественные члены. Поправка к функционалу Ландау для медленных переменных равна  $\mathcal{F}'(u') - \mathcal{F}(u') = \langle \mathcal{F}_{int} \rangle_0$ , где среднее берется по быстрым переменным с весом, определяемым (8.11), то есть парная корреляционная функция быстрого поля  $\tilde{u}$  равна в Фурье-представлении  $T/\kappa q^4$ . Следовательно,

$$\langle \nabla_\alpha \tilde{u} \nabla_\beta \tilde{u} \rangle_0 = \frac{T}{4\pi\kappa} \ln \left( \frac{\Lambda}{\Lambda'} \right) \delta_{\alpha\beta}, \quad (8.24)$$

где  $\Lambda'$  – наименьший волновой вектор быстрого поля  $\tilde{u}$ . В соответствии с (8.23, 8.24) мы находим  $\Delta\kappa = -3T/(4\pi) \ln(\Lambda/\Lambda')$ . Таким образом мы получаем РГ-уравнение [40]

$$\frac{d\kappa}{d\xi} = -\frac{3T}{4\pi}, \quad (8.25)$$

где  $\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ . Как следует из (8.25), роль “инвариантного заряда” (безразмерной константы связи) играет следующая величина

$$g = \frac{3T}{4\pi\kappa}. \quad (8.26)$$

Для применимости теории возмущений константа связи  $g$  должна быть малой,  $g \ll 1$ .

Из соотношений (8.25, 8.26) следует уравнение

$$\frac{dg}{d\xi} = g^2. \quad (8.27)$$

Таким образом, как и для  $\mathbf{n}$ -поля, мы сталкиваемся с ситуацией, которая в квантовой теории поля называется “асимптотической свободой” [18], когда безразмерная константа связи растет при увеличении масштаба. Можно сказать, что взаимодействие с малыми масштабами делает мембрану более мягкой на больших масштабах. Решением уравнения (8.27) является

$$g = \frac{g_0}{(1 - g_0\xi)}. \quad (8.28)$$



Здесь  $g_0$  – коротковолновое значение константы связи. Необходимым условием применимости нашей теории, основанной на теории возмущений, является  $g_0 \ll 1$ . Условие  $g \ll 1$  означает, что наша теория работает вплоть до масштабов  $L$ , определяемых  $g_0 \ln(\Lambda L) \sim 1$ . Вспоминая соотношение (8.15) (где надо брать коротковолновое значение  $\kappa$ ), мы приходим к выводу, что теория возмущений работает в промежутке масштабов между молекулярной длиной и персистентной длиной.

Определим теперь РГ-уравнение для поверхностного натяжения  $\sigma$ , которое входит в энергию (8.10). Для того, чтобы найти ренормировку  $\sigma$ , достаточно разложить энергию (8.10) до второго порядка по  $\tilde{u}$ , в результате чего получается (8.16) с  $u \rightarrow \tilde{u}$ . Теперь мы в соответствии с (8.22) находим поправку  $\mathcal{F}'_\sigma - \mathcal{F}_\sigma$ , равную  $\langle \mathcal{F}_\sigma^{(2)}(\tilde{u}) \rangle_0$ , где скобки означают усреднение по быстрому полю. Используя (8.24), мы находим  $\langle \mathcal{F}_\sigma^{(2)}(\tilde{u}) \rangle_0 = T\sigma/4\pi \ln(\Lambda/\Lambda') \int dx dy$ . Сравнивая это выражение с затравочным значением  $\sigma \int dx dy$ , мы находим  $\Delta\sigma = T\sigma/4\pi \ln(\Lambda/\Lambda')$ , что дает следующее РГ-уравнение

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{g}{3}\sigma. \quad (8.29)$$

Сравнивая это уравнение с (8.27), мы приходим к выводу, что поверхностное натяжение растет с масштабом в соответствии с законом  $\sigma \propto g^{1/3}$ .

Отметим, что при конечном значении поверхностного натяжения ренормировка  $\kappa$ ,  $\sigma$  заканчивается на масштабе  $R_\sigma$ , введенном в (8.21). Таким образом, если  $R_c \gg R_\sigma$ , то  $g \ll 1$  на всех масштабах, и мы всегда остаемся в рамках теории возмущений.

Наряду с ренормировкой  $\kappa$  и  $\sigma$  ренормируется также модуль  $\bar{\kappa}$ . Поскольку соответствующий вклад в энергию (8.2) является топологическим инвариантом, РГ-уравнение для  $\bar{\kappa}$  трудно получить, рассматривая мембранный лист, так как это невозможно сделать без включения в схему определенных граничных условий. Более простым представляется вычисление ренормировки  $\bar{\kappa}$  для везикул, для которых в силу отсутствия границ нет проблемы граничных членов. Сам же закон ренормировки  $\bar{\kappa}$  (идущий с малых масштабов) не зависит, разумеется, от топологических свойств везикулы.

## 8.3 Вывод РГ-уравнений для везикулы

Мы приступаем к выводу РГ-уравнения для сдвигового модуля  $\bar{\kappa}$ . Для этого мы рассмотрим везикулу с топологией сферы. Это несколько усложняет схему вычислений по сравнению с рассмотренным выше

случае мембранного листа. Но зато снимается проблема граничных условий, что является ключевым моментом для рассмотрения члена (8.2). Для везикулы с топологией сферы вклад (8.2) равен  $4\pi\bar{\kappa}$ , и не зависит, как и следует, от конкретной формы везикулы. При исключении быстрых переменных из энергии (8.1) возникает дополнительный вклад в свободную энергию, который и дает ренормировку  $\bar{\kappa}$ . По ходу дела мы воспроизведем и уравнение (8.25) для  $\kappa$  (убедившись тем самым, что оно не зависит от топологии).

Будем считать, что везикула флуктуирует вблизи сферы радиуса  $R$ . Тогда естественно параметризовать форму везикулы, введя зависимость расстояния  $r$  от центра сферы до мембраны от азимутального и полярного углов  $\theta$  и  $\varphi$ , задающих соответствующее направление:  $r = R + u(\theta, \varphi)$ . Можно сказать, что  $u$  является смещением мембраны в радиальном направлении. Функция  $\Phi$  для такой параметризации равна  $\Phi = r - R - u$ . Поэтому единичный вектор, перпендикулярный к мембране, в соответствии с (8.4) записывается следующим образом

$$\mathbf{l} = |\nabla\Phi|^{-1} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\partial u}{r} \right), \quad |\nabla\Phi| = \sqrt{1 + \frac{(\partial u)^2}{r^2}}. \quad (8.30)$$

Здесь мы ввели обозначение  $\partial u$  для производной  $u$  “вдоль углов”, которая перпендикулярна  $\mathbf{r}$  и задается соотношениями

$$\begin{aligned} (\partial u)^2 &\equiv \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2, \\ \partial^2 u &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Тогда вклад в энергию (8.1) записывается в виде интеграла по углам

$$\mathcal{F}_H = \frac{\kappa}{2} \int d\theta d\varphi r^2 |\nabla\Phi| (\nabla\mathbf{l})^2, \quad (8.31)$$

где  $d\theta = \sin \theta d\theta d\varphi$  и  $r = R + u$ .

Теперь мы собираемся произвести элементарный шаг РГ-процедуры, разделяя поле  $u$  на медленную и быструю части  $u = u' + \tilde{u}$  с тем, чтобы проинтегрировать затем функцию распределения вероятности флуктуаций по быстрому полю  $\tilde{u}$ . Как мы уже отмечали, в силу инвариантности функционала Ландау относительно перепараметризации  $\Phi \rightarrow f(\Phi)$  интегрирование по быстрому полю  $\tilde{u}$  автоматически воспроизводит выражение (8.31) для медленного поля  $u'$ . Поэтому, чтобы найти законы ренормировки модулей  $\kappa$  и  $\bar{\kappa}$ , достаточно сохранить младшие члены разложения (8.31) по  $u'$  и  $\tilde{u}$ . Реально достаточно знать члены вплоть до четвертого порядка (суммарно по  $u'$  и  $\tilde{u}$ ). Поэтому

сначала мы находим члены разложения (8.31) по  $u$  вплоть до четвертого порядка.

Раскладывая подынтегральное выражение в (8.31) до четвертого порядка по  $u$  (при данном  $r$ ) мы находим

$$\mathcal{F}_H \approx 8\pi\kappa + \frac{\kappa}{2} \int do \left\{ -\frac{2}{r^2}(\partial u)^2 + \frac{1}{r^2}(\partial^2 u)^2 - \frac{2}{r^3}(\partial u)^2 \partial^2 u + \frac{5}{2r^4}(\partial u)^4 + \frac{1}{2r^4}(\partial u)^2(\partial^2 u)^2 + \frac{1}{r^4} \partial \partial^2 u \partial u (\partial u)^2 \right\},$$

где мы проинтегрировали по частям в некоторых членах. Раскладывая затем  $r = R + u$  по  $u$ , мы находим члены второго, третьего и четвертого порядка

$$\mathcal{F}_H^{(2)} = \frac{\kappa}{2R^2} \int do [(\partial^2 u)^2 - 2(\partial u)^2], \quad (8.32)$$

$$\mathcal{F}_H^{(3)} = \frac{\kappa}{R^3} \int do [-u(\partial^2 u)^2 - (\partial u)^2 \partial^2 u], \quad (8.33)$$

$$\mathcal{F}_H^{(4)} = \frac{\kappa}{2R^4} \int do \left\{ 3u^2(\partial^2 u)^2 + 6u(\partial u)^2 \partial^2 u + \frac{5}{2}(\partial u)^4 + \frac{1}{2}(\partial u)^2(\partial^2 u)^2 + \partial \partial^2 u \partial u (\partial u)^2 \right\}, \quad (8.34)$$

где сохранены только главные члены по производной  $\partial$ .

Теперь мы должны подставить  $u = u' + \tilde{u}$  и удержать члены второго порядка по  $\tilde{u}$  (чего будет достаточно для вычисления однопетлевых РГ-уравнений). Раскладывая (8.33) до второго порядка по  $\tilde{u}$ , мы находим

$$\mathcal{F}_{int}^{(3)} = \frac{\kappa}{R^3} \int do \{ \partial^2 u' (\partial \tilde{u})^2 - u' (\partial^2 \tilde{u})^2 - 2\partial u' \partial \tilde{u} \partial^2 \tilde{u} \}. \quad (8.35)$$

Аналогичное выражение может быть получено из (8.34) для  $\mathcal{F}_{int}^{(4)}$ . Далее, мы вычисляем поправку к медленной части функционала Ландау

$$\Delta \mathcal{F}_H^{(2)} = \langle \mathcal{F}_{int}^{(4)} \rangle - \frac{1}{2T} \langle \langle \mathcal{F}_{int}^{(3)} \mathcal{F}_{int}^{(3)} \rangle \rangle,$$

где среднее вычисляется в соответствии с (8.32). Подставляя сюда выражения для  $\mathcal{F}_{int}^{(3)}$  и  $\mathcal{F}_{int}^{(4)}$ , мы получаем

$$\Delta \mathcal{F}_\kappa^{(2)} = \frac{\kappa}{2R^4} \int do \left\{ -\frac{3}{2} \langle (\partial \tilde{u})^2 \rangle (\partial^2 u')^2 - \frac{3}{2} \langle (\partial^2 \tilde{u})^2 \rangle (\partial u')^2 + (10 - 8) (\partial u')^2 \langle (\partial \tilde{u})^2 \rangle \right\}. \quad (8.36)$$

Первые два члена и член с коэффициентом 10 в правой части (8.36) происходят из  $\langle \mathcal{F}_{int}^{(4)} \rangle$ , а член с коэффициентом  $-8$  в правой части (8.36) происходит из  $-\langle \mathcal{F}_{int}^{(3)} \mathcal{F}_{int}^{(3)} \rangle / (2T)$ .

Переходя к представлению в виде суммы угловых гармоник, можно найти

$$\langle (\partial \tilde{u})^2 \rangle = \frac{R^2 T}{2\pi\kappa} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}. \quad (8.37)$$

Подставляя выражение (8.37) в (8.36) и сравнивая результат с (8.32), мы находим, что первый член в подынтегральном выражении в (8.36) дает  $\Delta\kappa = -3T/(4\pi) \ln(\Lambda/\Lambda')$ , что находится в соответствии с (8.25). Однако выражение (8.36) обязано воспроизводить (8.32) во всех деталях. Чтобы воспроизвести второй член в подынтегральном выражении в (8.32), необходимо потребовать

$$\langle (\partial^2 \tilde{u})^2 \rangle = -\frac{R^2 T}{3\pi\kappa} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}. \quad (8.38)$$

Это необычное правило связано с тем фактом, что разбиение  $u = u' + \tilde{u}$  производится для угловых гармоник с угловыми числами  $l, m$ , и, следовательно, ограничение  $R\Lambda' < l < R\Lambda$  формулируется для дискретного набора гармоник. Поэтому в среднем  $\langle (\partial^2 \tilde{u})^2 \rangle$  наряду с главным ультрафиолетовым вкладом (который включается в ренормировку поверхностного натяжения) имеется также и логарифмический вклад, зафиксированный в (8.38).

Теперь мы можем найти поправку к свободной энергии, которая возникает при интегрировании по быстрому полю  $\tilde{u}$ . В соответствии с (8.32) эта поправка равна

$$\Delta F = \frac{2\pi\kappa}{R^2} [\langle (\partial^2 \tilde{u})^2 \rangle - 2\langle (\partial \tilde{u})^2 \rangle].$$

Подставляя сюда (8.37) и (8.38) мы получаем  $\Delta F = -(8/3)T \ln(\Lambda/\Lambda')$ , что дает поправку к свободной энергии везикулы, которая в нулевом приближении по флуктуациям равна  $F = 4\pi(2\kappa + \bar{\kappa})$ . Поэтому найденную поправку  $\Delta F$  следует приравнять к  $4\pi(2\Delta\kappa + \Delta\bar{\kappa})$ . Подставляя сюда  $\Delta\kappa = -3T/(4\pi) \ln(\Lambda/\Lambda')$  мы находим  $\Delta\bar{\kappa} = 5T/(6\pi) \ln(\Lambda/\Lambda')$ . Это ведет к следующему РГ-уравнению [40]

$$\frac{d\bar{\kappa}}{d\xi} = \frac{5T}{6\pi}. \quad (8.39)$$

Можно сказать, что при исключении быстрых переменных  $\bar{\kappa}$  растет, абсорбируя в себя их энтропию.

## Задачи

### Задача 8.1

Во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}$  имеется следующий анизотропный вклад в энергию мембраны:

$$\mathcal{F}_H = - \int dS \frac{\alpha}{2} \left[ 3(\mathbf{H}\mathbf{l})^2 - H^2 \right], \quad (8.40)$$

где  $\mathbf{l}$  – единичный вектор, перпендикулярный к мембране. Найти РГ-уравнение для фактора  $\alpha$ . Рассмотреть два случая:  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ .

### Решение задачи 8.1

Прежде всего, выражение (8.40) воспроизводится при ренормировке. Именно для выполнения этого свойства мы записали энергию (8.40) в виде определенной (второй) угловой гармоники.

Сначала мы рассмотрим случай  $\alpha > 0$ . При этом условии минимум энергии (8.40) достигается, когда единичный вектор  $\mathbf{l}$  параллелен  $\mathbf{H}$ , то есть мембрана перпендикулярна магнитному полю (и является плоской). Поэтому имеет смысл рассматривать флуктуации мембраны, как отклонения ее от этой формы. Вводя координаты  $x, y$  в плоскости, перпендикулярной магнитному полю  $\mathbf{H}$ , мы переписываем выражение (8.40) в следующем виде

$$\mathcal{F}_H = -H^2 \int dx dy \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{3}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} - \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \right]. \quad (8.41)$$

Раскладывая подынтегральное выражение в (8.41) до второго порядка по  $(\nabla u)^2$  и вычисляя среднее от получившегося выражения по быстрым флуктуациям, мы находим поправку  $-H^2 \int dx dy \Delta\alpha$  к нулевому члену разложения (8.41), где

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = - \langle (\nabla \tilde{u})^2 \rangle. \quad (8.42)$$

Среднее здесь в соответствии с (8.12) пропорционально  $\ln(\Lambda/\Lambda')$ . Конвертируя эту поправку в РГ-уравнение, мы находим

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = -\frac{2}{3}g\alpha. \quad (8.43)$$

Рассмотрим теперь случай  $\alpha < 0$ . При этом условии минимум энергии (8.40) достигается, когда единичный вектор  $\mathbf{l}$  перпендикулярен  $\mathbf{H}$ , то есть мембрана параллельна магнитному полю. Поэтому имеет смысл рассматривать флуктуации мембраны, как отклонения ее

от этой формы. Вводя координаты  $x, y$  в плоскости, соответствующей равновесной форме мембраны, и направляя ось  $X$  вдоль магнитного поля  $\mathbf{H}$ , мы переписываем выражение (8.40) в следующем виде

$$\mathcal{F}_H = -H^2 \int dx dy \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{3(\partial_x u)^2}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} - \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \right]. \quad (8.44)$$

Раскладывая подинтегральное выражение в (8.44) до второго порядка по  $(\nabla u)^2$  и вычисляя среднее от получившегося выражения по быстрым флуктуациям, мы находим поправку  $H^2 \int dx dy \Delta\alpha/2$  к нулевому члену разложения (8.44), где  $\Delta\alpha$  определяется тем же выражением (8.42). В результате мы приходим к тому же РГ-уравнению (8.43).

Таким образом, РГ-уравнение для фактора  $\alpha$  не зависит от его знака.

### Задача 8.2

Упругая энергия мембраны имеет вид

$$\mathcal{F}_{el} = \int dS \frac{B}{2} \frac{(n_s - n_0)^2}{n_0^2}, \quad (8.45)$$

где  $B$  – модуль упругости,  $n_s$  – поверхностная плотность молекул, а  $n_0$  – равновесное значение  $n_s$ . Найти РГ-уравнение для  $n_0$  и модуля  $B$ . Ответ выразить через инвариантный заряд  $g$ .

### Решение задачи 8.2

Среднее значение плотности мембраны  $n_0$  определяет общее число молекул мембраны  $N$ :

$$N = \int dx dy \sqrt{1 + (\nabla u)^2} n_0.$$

Произведя в этом интеграле исключение мелкомасштабных переменных, мы получаем для  $n_0$  такое же РГ-уравнение, как и (8.29) для поверхностного натяжения  $\sigma$

$$\frac{dn_0}{d\xi} = \frac{1}{3} g n_0. \quad (8.46)$$

Смысл этого уравнения заключается в том, что величина площади мембраны зависит от “разрешения”, с которым мы ее рассматриваем. При исключении мелкомасштабных степеней свободы “сглаживаются” мелкие выступы, в результате чего площадь мембраны уменьшается. Соответственно, увеличивается плотность мембраны, что и отражено в уравнении (8.46). Аналогично (8.46) ренормируется и локальное

значение плотности мембраны  $n_s$ . Поэтому безразмерная комбинация  $(n_s - n_0)^2/n_0^2$  в выражении (8.45) остается при ренормировке неизменной. Имея это в виду, мы находим для модуля  $B$  РГ-уравнение

$$\frac{dB}{d\xi} = \frac{1}{3}gB,$$

опять-таки в полной аналогии с выводом РГ-уравнения (8.29) для поверхностного натяжения  $\sigma$ .

### Задача 8.3

Если мембрана является асимметричной (то есть если ее поверхности не эквивалентны), то наряду с энергией (8.1,8.2) имеется также следующий вклад в энергию мембраны

$$\mathcal{F}_{as} = \int dS \mu \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (8.47)$$

Найти ренорм-групповое уравнение для коэффициента  $\mu$ , предполагая, что  $\mathcal{F}_{as}$  является малой поправкой к (8.1,8.2).

### Решение задачи 8.3

В координатах энергия (8.47) записывается следующим образом

$$\mathcal{F}_{as} = - \int dx dy \mu \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \nabla_\alpha \left[ \frac{\nabla_\alpha u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right].$$

Раскладывая эту энергию, мы находим члены первого и третьего порядка по  $u$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{as}^{(1)} &= - \int dx dy \mu \nabla^2 u, \\ \mathcal{F}_{as}^{(3)} &= - \frac{1}{2} \int dx dy \mu \{ (\nabla u)^2 \nabla^2 u - \nabla_\alpha [\nabla_\alpha u (\nabla u)^2] \}. \end{aligned}$$

Подставляя разложение  $u \rightarrow u' + \tilde{u}$  в  $\mathcal{F}_{as}^{(3)}$ , удерживая в нем член второго порядка по  $\tilde{u}$  и усредняя результат по статистике быстрых переменных, мы получаем

$$\langle \mathcal{F}_{as}^{(3)} \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \int dx dy \mu \nabla^2 u' \langle (\nabla \tilde{u})^2 \rangle.$$

Сравнивая этот результат с  $\mathcal{F}_{as}^{(1)}$ , мы находим следующее РГ-уравнение

$$\frac{d\mu}{d\xi} = -\frac{1}{3}g\mu.$$

## Лекция 9

# Фазовый переход БКТ

Такие дефекты, как квантовые вихри, дислокации и дисклинации в тонких пленках (которые могут считаться двумерными системами) являются точечными объектами и могут поэтому производиться за счет теплового движения (в то время, как в трехмерных системах породить, скажем, дислокацию за счет теплового движения практически невозможно). Энергия такого единичного дефекта пропорциональна логарифму размера образца. Поэтому при низких температурах производятся только связанные пары дефект-антидефект, так как энергия этой пары конечна (не зависит от размера образца). При возрастании же температуры плотность этих пар растет. Наряду с этим растет энтропия единичного дефекта, которая также пропорциональна логарифму размера образца. Поэтому при некоторой температуре  $T_c$  произведение  $TS$  (где  $S$  – энтропия дефекта) становится больше, чем энергия дефекта. Выше  $T_c$  в пленке спонтанно возникают одиночные дефекты, которые разрушают дальние корреляции параметра порядка в пленке. Поэтому при  $T = T_c$  происходит фазовый переход, например, переход сверхтекучая-нормальная жидкость в пленке гелия-4. Этот переход был впервые изучен Березинским [41], а затем исследован Костерлицем и Таулессом [42]. По первым буквам фамилий упомянутых авторов мы будем называть его переходом БКТ. Теми же характеристиками обладает фазовый переход в двумерных планарных магнетиках. Упомянем обзоры [43, 44, 45, 46, 47], посвященные переходу БКТ. Отметим, что фазовые переходы того же типа должны наблюдаться при нагреве двумерных кристаллов. А именно, сначала кристалл должен превращаться в так называемую гексатическую фазу, которая затем плавится в жидкость [48, 49]. Эти переходы связаны с появлением распаренных дислокаций и дисклинаций, соответственно.



## 9.1 Производящий функционал

Для определенности мы будем говорить о переходе сверхтекучая-нормальная жидкость. Сверхтекучая скорость гелия-4 равна  $\mathbf{v}_s = \hbar \nabla \phi / m$ , где  $\phi$  – фаза параметра порядка, а  $m$  – масса атома гелия-4. Вокруг вихря, расположенного в точке  $\mathbf{r}_j$ , сверхтекучая скорость следующим образом зависит от координат

$$v_{s\alpha} = n_j \hbar \frac{\epsilon_{\beta\alpha}(r_\beta - r_{j,\beta})}{m|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (9.1)$$

Здесь  $n_j$  – целое число (“заряд” вихря), что обеспечивает кратность  $2\pi$  интеграла  $\oint d\mathbf{r} \nabla \phi$ , взятого по контуру, обходящему вихрь. В точке расположения вихря его фаза  $\phi$  не определена (однако сам параметр порядка остается хорошо определенным во всем пространстве, поскольку в точке расположения вихря он обращается в ноль). Сверхтекучая скорость пленки является суммой вкладов (9.1) от всех вихрей с добавлением гладкой (безвихревой) составляющей:

$$v_{s,\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{n_j \hbar}{m} \frac{\epsilon_{\beta\alpha}(r_\beta - r_{j,\beta})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2} + \frac{\hbar}{m} \nabla_\alpha \phi_0. \quad (9.2)$$

Завихренность сверхтекучей скорости  $\omega$  равна

$$\omega = \epsilon_{\gamma\alpha} \nabla_\gamma v_{s,\alpha} = \sum_j 2\pi n_j \frac{\hbar}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (9.3)$$

Таким образом, завихренность имеет  $\delta$ -образные особенности в точках расположения вихрей.

Энергия, связанная со сверхтекучей скоростью, записывается в следующем виде

$$\mathcal{F}_s = \int d^2 r \frac{\rho_s}{2} v_s^2, \quad (9.4)$$

где  $\rho_s$  – двумерная сверхтекучая плотность. Она является функцией температуры: при  $T = 0$  значение  $\rho_s$  совпадает с полной двумерной плотностью массы пленки, и при увеличении температуры  $\rho_s$  уменьшается за счет роста числа возбуждений типа фононов. Строго говоря, выражение (9.4), предполагающее однородность абсолютной величины параметра порядка  $|\psi|$ , перестает работать вблизи точки расположения вихря, где  $|\psi|$  существенно зависит от расстояния до точки расположения вихря. Об этой области обычно говорят, как о ядре вихря. Ядро вихря следует рассматривать отдельно, вне рамок приближения (9.4). Отметим, что обратный размер ядра  $\Lambda$  играет роль ультрафиолетовой обрезки, определяя предельное значение волновых векторов в Фурье-разложении  $\mathbf{v}_s$ .

Вернемся теперь к физической картине перехода, связанной с возможностью спонтанного появления одиночных вихрей. Как следует из (9.1,9.4), энергия единичного вихря равна

$$E = \frac{\pi \rho_s \hbar^2}{m^2} \ln(\Lambda L),$$

где  $L$  – размер образца, и мы использовали выражение для сверхтекучей скорости вокруг вихря с  $n_j = \pm 1$ , что соответствует минимальной энергии вихря. Энтропию же вихря  $S$  можно оценить следующим образом. Вихрь может занимать любую из  $(\Lambda L)^2$  “клеточек”, а его энтропия равна логарифму числа клеточек, то есть  $S = 2 \ln(\Lambda L)$ . Приравнявая теперь  $TS$  к энергии вихря  $E$ , выписанной выше, мы получаем соотношение

$$\rho_s = \frac{2m^2 T}{\pi \hbar^2} \quad (9.5)$$

При  $\rho_s > 2m^2 T / (\pi \hbar^2)$  свободная энергия вихря  $E - TS$  положительна, и потому одиночные вихри не могут возникать за счет теплового движения. При меньших же значениях  $\rho_s$  одиночные вихри могут спонтанно рождаться, что означает неустойчивость сверхтекучего состояния жидкости. Поэтому сверхтекучее состояние с  $\rho_s < 2m^2 T / (\pi \hbar^2)$  оказывается невозможным. Таким образом, при увеличении температуры  $\rho_s$  сначала уменьшается, оставаясь конечной (что соответствует сверхтекучей фазе), а затем, достигнув величины (9.5), скачком обращается в ноль (что соответствует переходу в нормальное состояние) [50].

Обратимся теперь к произвольной системе вихрей. Подставляя (9.2) в (9.4) и отдельно учитывая области вблизи вихрей (их ядра), мы получаем

$$\mathcal{F}_s = \int d^2 r \frac{\rho_s \hbar^2}{2m^2} (\nabla \phi_0)^2 + \mathcal{F}_{\text{vort}}, \quad (9.6)$$

$$\mathcal{F}_{\text{vort}} = -\pi \sum_{i \neq j} \frac{\rho_s \hbar^2}{m^2} n_i n_j \ln(\Lambda r_{ij}) + \sum_i \mu(n_i). \quad (9.7)$$

Первое слагаемое в (9.6) – энергия гладкой (безвихревой) составляющей скорости, а  $\mathcal{F}_{\text{vort}}$  – энергия, связанная с вихрями. Факторы  $\mu(n_j)$  в (9.7) представляют энергию ядер вихрей, которая зависит, конечно, от “заряда” вихря. Отметим, что в (9.6) отсутствует перекрестный член, так как вихревой вклад в сверхтекучую скорость является бездивергентным, что легко проверить, вычислив дивергенцию скорости (9.1). Поскольку энергия, связанная с вихрями, и энергия, связанная с гладкой составляющей сверхтекучей скорости, разделяются, эти две составляющие можно рассматривать отдельно, независимо друг

от друга. В дальнейшем мы будем интересоваться только вихревой составляющей  $\mathbf{v}_s$ , определенной первым членом в выражении (9.2).

Корреляционные функции вихревой составляющей сверхтекучей скорости могут быть выражены через корреляционные функции завихренности (9.3). Полную информацию о последних несет в себе производящий функционал

$$\mathcal{Z}(\sigma) = \left\langle \exp \left\{ i \frac{m}{2\pi\hbar} \int d^2r \sigma \omega \right\} \right\rangle, \quad (9.8)$$

где  $\sigma$  – произвольная функция координат. Корреляционные функции завихренности (9.3) получаются, как коэффициенты разложения  $Z$  по полю  $\sigma$ . Усреднение в (9.8) означает, что с весом  $\exp[(F - \mathcal{F}_{\text{vort}})/T]$  надо просуммировать по “зарядам” вихрей (целым числам)  $n_j$  при заданном числе вихрей  $N$ , а также по  $N$  от нуля до бесконечности, и проинтегрировать по координатам всех вихрей:

$$\mathcal{Z}(\sigma) = \sum_{N, n_j} \frac{1}{N!} \prod_j \int \Lambda^2 d^2r_j \exp \{ i n_j [\sigma(\mathbf{r}_j)] \} \exp[(F - \mathcal{F}_{\text{vort}})/T]. \quad (9.9)$$

Свободная же энергия  $F$  определяется из условия нормировки функции распределения:

$$\exp(-F/T) = \sum_{N, n_j} \frac{1}{N!} \prod_j \int \Lambda^2 d^2r_j \exp(-\mathcal{F}_{\text{vort}}/T). \quad (9.10)$$

Множитель  $\Lambda^2$  введен в соотношения (9.9, 9.10) с тем, чтобы обезразмерить интегрирование по координатам.

Сформулированное выше представление для средних, опирающееся на представление о дискретных “частицах”, не слишком удобно для анализа. Удобнее иметь дело с “полевым” представлением, которое использовалось нами ранее, в предыдущих лекциях. Поэтому ниже мы производим формальные преобразования, имеющие своей целью свести задачу к “полевой”.

Вихревая составляющая сверхтекучей скорости может быть записана как  $\epsilon_{\alpha\beta} \nabla_\beta \Phi$ . В терминах “потенциала”  $\Phi$  соотношение (9.3) переписывается в следующем виде

$$\nabla^2 \Phi = - \sum_j 2\pi n_j \frac{\hbar}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (9.11)$$

напоминающем уравнение для электростатического потенциала точечных зарядов. Это соотношение является основанием для так называемой электростатической аналогии, когда вихри рассматриваются, как

точечные заряды. Тогда выражение (9.7) является естественным следствием логарифмического характера взаимодействия точечных зарядов в двумерии. Возвращаясь к исходному выражению для энергии, связанной со сверхтекучей скоростью, мы можем записать

$$\mathcal{F}_{\text{vort}} = \int d^2r \frac{\rho_s}{2} (\nabla \Phi)^2 + \sum_i \mu(n_i), \quad (9.12)$$

где в интеграле исключены ядра вихрей, а связанная с ними энергия учитывается отдельно.

Перепишем теперь Гиббсовский фактор, определяемый энергией (9.12), в виде функционального интеграла по “потенциалу”  $\Phi$  и вспомогательному полю  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned} \exp(-\mathcal{F}_{\text{vort}}/T) &= \int \mathcal{D}\vartheta \mathcal{D}\Phi \exp(\mathcal{U}), \\ \mathcal{U} &= -\frac{1}{T} \int d^2r \frac{\rho_s}{2} (\nabla \Phi)^2 + i \int d^2r \frac{m}{2\pi\hbar} \vartheta \nabla^2 \Phi \\ &\quad + i \sum_j n_j \vartheta(\mathbf{r}_j) - T^{-1} \sum_j \mu(n_j). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Здесь интеграл по полю  $\vartheta$  производит функциональную  $\delta$ -функцию, гарантирующую выполнение условия (9.11), а интеграл по  $\Phi$  “снимает” эту  $\delta$ -функцию. Беря в приведенном выше выражении Гауссов интеграл по  $\Phi$ , мы находим для  $\exp(-\mathcal{F}_{\text{vort}}/T)$  выражение

$$\int \mathcal{D}\vartheta \exp \left\{ - \int d^2r \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 + i \sum_j n_j \vartheta(\mathbf{r}_j) - T^{-1} \sum_j \mu(n_j) \right\}.$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\alpha = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^2 \frac{T}{\rho_s}. \quad (9.14)$$

Подставляя выражение (9.13) для Гиббсовского фактора в (9.9), мы получаем

$$\mathcal{Z}(\sigma) = \int \mathcal{D}\vartheta \exp[(F - \mathcal{H}_\sigma)/T], \quad (9.15)$$

где

$$\begin{aligned} \exp(-\mathcal{H}_\sigma) &= \exp \left\{ - \int d^2r \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 \right\} \\ &\times \sum \frac{1}{N!} \prod_j \int \Lambda^2 d^2r_j \exp \left\{ i n_j [\vartheta(\mathbf{r}_j) + \sigma(\mathbf{r}_j)] - \frac{\mu(n_j)}{T} \right\}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Напомним, что суммирование здесь ведется по “зарядам” вихрей  $n_j$  при заданном числе вихрей  $N$ , а также по  $N$  от нуля до бесконечности. Отметим, что из выражения (9.16) следует, что функционал  $\mathcal{H}$  инвариантен относительно преобразования  $\vartheta \rightarrow \vartheta + 2\pi$ , так как  $n_j$  являются целыми числами.

В дальнейшем мы будем считать, что возбуждаются только вихри с  $n_j = \pm 1$ . Это означает, что выполняется неравенство  $\mu \gg T$ , которое приводит к выводу, что вероятность возбуждения вихрей с  $|n_j| > 1$  гораздо меньше, чем с  $|n_j| = 1$  (поскольку энергия ядра вихря при  $|n_j| = 1$  меньше, чем при  $|n_j| > 1$ ). Сохраняя в (9.16) только члены с  $n_j = \pm 1$ , мы получаем

$$\exp(-\mathcal{H}) = \exp \left\{ - \int d^2 r \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 \right\} \times \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left\{ \int \Lambda^2 d^2 r 2 \exp(-\mu/T) \cos[\vartheta(\mathbf{r})] \right\}^N,$$

где  $\mu = \mu(1)$  и  $\mathcal{H}$  равен  $\mathcal{H}_\sigma$  при  $\sigma = 0$ . Суммируя далее по  $N$ , мы получаем

$$\mathcal{H} = \int d^2 r \left\{ \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 - \beta \cos(\vartheta) \right\}, \quad (9.17)$$

где  $\beta = 2\Lambda^2 \exp(-\mu/T)$ . Таким образом, мы приходим к выражению, которое, как и следует, является периодическим по  $\vartheta$ .

Подставляя выражение (9.17), в которое следует добавить член с полем  $\sigma$ , в (9.15), мы получаем искомое “полевое” представление для производящего функционала корреляционных функций завихренности:

$$\mathcal{Z}(\sigma) = \int \mathcal{D}\vartheta \exp \left\{ - \int d^2 r \left[ \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 - \beta \cos(\vartheta + \sigma) \right] \right\}. \quad (9.18)$$

Раскладывая правую часть (9.18) до второго порядка по  $\sigma$ , мы получаем следующее выражение для парной корреляционной функции

$$\left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^2 \langle \omega(\mathbf{r}_1) \omega(\mathbf{r}_2) \rangle = \beta \langle \cos \vartheta \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \beta^2 \langle \sin[\vartheta(\mathbf{r}_1)] \sin[\vartheta(\mathbf{r}_2)] \rangle. \quad (9.19)$$

Здесь усреднение происходит с весом  $\exp(F/T - \mathcal{H})$ , где  $\mathcal{H}$  определяется (9.17). Аналогичные выражения можно получить и для высших корреляционных функций завихренности  $\omega$ .

Схема, изложенная выше, была основана на “каноническом” распределении вихрей, когда относительное число вихрей с положительным и отрицательным зарядами (вихрей и антивихрей) может быть

произвольным. Поучительно получить тот же самый ответ для “микророканонического” распределения, принимая во внимание тот факт, что в замкнутой системе возможно рождение только пар вихрь-антивихрь, то есть число вихрей равно числу антивихрей. Тогда мы получаем вместо (9.16)

$$\begin{aligned} \exp(-\mathcal{H}_{\text{mc}}) &= \exp \left\{ - \int d^2 r \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 \right\} \\ &\times \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N!)^2} \left\{ \int \Lambda^2 d^2 r \exp [i\vartheta(\mathbf{r}) - \mu/T] \right\}^N \\ &\times \left\{ \int \Lambda^2 d^2 r \exp [-i\vartheta(\mathbf{r}) - \mu/T] \right\}^N, \end{aligned}$$

где опять учитываются только вихри с  $n_j = \pm 1$ . Приведенное выражение можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \exp(-\mathcal{H}_{\text{mc}}) &= \int_0^{2\pi} \frac{ds}{2\pi} \exp \left\{ - \int d^2 r \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 \right\} \\ &\times \sum_{N_1, N_2=0}^{\infty} \frac{1}{(N_1!)(N_2!)} \exp(isN_1 - isN_2) \\ &\times \left\{ \int \Lambda^2 d^2 r (\beta/2) \exp [i\vartheta(\mathbf{r})] \right\}^{N_1} \left\{ \int \Lambda^2 d^2 r (\beta/2) \exp [-i\vartheta(\mathbf{r})] \right\}^{N_2}, \end{aligned}$$

где мы использовали соотношение

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{2\pi} \exp(isN_1 - isN_2) = \delta_{N_1, N_2}.$$

Производя суммирование по  $N_1$  и  $N_2$ , мы получаем

$$\exp(-\mathcal{H}_{\text{mc}}) = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{2\pi} \exp \left\{ \int d^2 r \left[ -\frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2 + \beta \cos(s + \vartheta) \right] \right\}.$$

Подставляя  $\mathcal{H}_{\text{mc}}$  вместо  $\mathcal{H}$  в (9.15), меняя порядок интегрирования по  $s$  и  $\vartheta$ , и производя сдвиг  $\vartheta \rightarrow \vartheta - s$ , мы убеждаемся, что зависимость от  $s$  исчезает, и интеграл по  $s$  дает единицу. Таким образом, мы возвращаемся к тому же выражению (9.18) для производящего функционала, что и в “каноническом” случае.

## 9.2 РГ-уравнения

В силу того, что параметр  $\beta$  содержит малый фактор  $\exp(-\mu/T)$ , естественно вычислять корреляционные функции типа (9.19) в рамках теории возмущений по  $\beta$ . В нулевом приближении по  $\beta$  мы можем вообще пренебречь членом с  $\beta$  в выражении (9.17), и мы получаем квадратичное выражение

$$\mathcal{H}_0 = \int d^2r \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta)^2. \quad (9.20)$$

В результате все средние сводятся к Гауссовым интегралам и вычисляются явно. Например, входящее в парную корреляционную функцию (9.19) среднее в этом приближении равно

$$\begin{aligned} 2 \langle \sin[\vartheta(\mathbf{r}_1)] \sin[\vartheta(\mathbf{r}_2)] \rangle_0 &= \exp \left[ -\frac{1}{2\pi\alpha} \ln(\Lambda r_{12}) \right] \\ &- \exp \left[ \frac{1}{2\pi\alpha} \ln(\Lambda r_{12}) - \frac{1}{\pi\alpha} \ln(\Lambda L) \right], \end{aligned} \quad (9.21)$$

где  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  и  $L$  – размер образца. Для большого образца, когда  $L \gg r_{12}$ , второе слагаемое в (9.21) пренебрежимо мало, и мы приходим к выводу, что  $\langle \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \rangle_0 \propto r_{12}^{-1/(2\pi\alpha)}$ . Точно также  $\langle \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \rangle_0 \propto r_{12}^{-1/(2\pi\alpha)}$ . Поэтому в ряду теории возмущений, которая порождается разложением по  $\beta \cos \vartheta$ , появляются интегралы по пространству от степенных функций, которые расходятся либо на малых расстояниях  $r$ , либо на больших. Таким образом, прямая теория возмущений не является осмысленной.

Выходом из этого тупика является ренорм-группа, которая для данного случая имеет ряд особенностей. Проведем элементарный шаг РГ-процедуры. Разделим поле  $\vartheta$  на медленную  $\vartheta'$  и быструю  $\tilde{\vartheta}$  части:

$$\vartheta = \vartheta' + \tilde{\vartheta}, \quad \vartheta' = \sum_{q < \Lambda'} \vartheta_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \quad \tilde{\vartheta} = \sum_{\Lambda' < q < \Lambda} \vartheta_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}). \quad (9.22)$$

Затем мы должны ввести “медленный” функционал  $\mathcal{H}'$ :

$$\exp[-\mathcal{H}'(\vartheta')] = \int \mathcal{D}\tilde{\vartheta} \exp[-\mathcal{H}(\vartheta' + \tilde{\vartheta})]. \quad (9.23)$$

Мы будем считать  $\Delta\Lambda/\Lambda \ll 1$  (где  $\Delta\Lambda = \Lambda - \Lambda'$ ), что позволит нам раскладываться по  $\tilde{\vartheta}$ . Сохраняя члены первого и второго порядка, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vartheta' + \tilde{\vartheta}) &= \int d^2r \left\{ \frac{\alpha}{2} (\nabla \vartheta')^2 + \frac{\alpha}{2} (\nabla \tilde{\vartheta})^2 \right\} \\ &+ \int d^2r \left\{ -\beta \cos(\vartheta') + \beta \sin(\vartheta') \tilde{\vartheta} + \frac{\beta}{2} \cos(\vartheta') \tilde{\vartheta}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Далее, мы можем разложить экспоненту в правой части соотношения (9.23) по  $\beta\tilde{\vartheta}$ . Это разложение оправдывается малостью параметра  $\gamma = \beta/\Lambda^2$ . Напомним, что на малых масштабах  $\gamma = 2 \exp(-\mu/T)$ , то есть затравочно  $\gamma$  действительно является малой величиной. Сохраняя первые два члена разложения по  $\beta$ , мы находим

$$\mathcal{H}'(\vartheta') - \mathcal{H}(\vartheta') = \mathcal{H}_{(1)} + \mathcal{H}_{(2)}, \quad (9.25)$$

$$\mathcal{H}_{(1)} = \frac{\beta}{2} \int d^2r \cos(\vartheta') \langle \tilde{\vartheta}^2 \rangle_0, \quad (9.26)$$

$$\mathcal{H}_{(2)} = -\frac{\beta^2}{8} \int d^2r_1 d^2r_2 \cos(\vartheta'_1) \cos(\vartheta'_2) \langle \langle \tilde{\vartheta}_1^2 \tilde{\vartheta}_2^2 \rangle \rangle, \quad (9.27)$$

$$\mathcal{H}_{(3)} = -\frac{\beta^2}{2} \int d^2r_1 d^2r_2 \sin(\vartheta'_1) \sin(\vartheta'_2) \langle \tilde{\vartheta}_1 \tilde{\vartheta}_2 \rangle. \quad (9.28)$$

Угловые скобки здесь означают усреднение с Гауссовой функцией распределения

$$\langle Y(\tilde{\vartheta}) \rangle_0 \equiv \int \mathcal{D}\tilde{\vartheta} \exp \left[ - \int d^2r \frac{\alpha}{2} (\nabla \tilde{\vartheta})^2 \right] Y(\tilde{\vartheta}), \quad (9.29)$$

которая характеризуется следующей парной корреляционной функцией

$$\begin{aligned} G(r) &= \langle \tilde{\vartheta}(\mathbf{r}) \tilde{\vartheta}(0) \rangle_0 = \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{1}{\alpha q^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{dq}{q} J_0(qr) \approx \frac{1}{2\pi\alpha} \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} J_0(\Lambda r). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Используя значение (9.30) при  $r = 0$ , мы находим

$$\mathcal{H}_{(1)} = \frac{\beta}{4\pi\alpha} \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} \int d^2r \cos(\vartheta'). \quad (9.31)$$

Таким образом, наличие этого вклада можно рассматривать, как появление поправки к  $\beta$ :  $\Delta\beta = -[\beta(4\pi\alpha)]\Delta\Lambda/\Lambda$ . Другими словами, мы приходим к РГ-уравнению для  $\beta$ :

$$\frac{d\beta}{d\xi} = -\frac{\beta}{4\pi\alpha}, \quad (9.32)$$

которое, как и раньше, определяет изменение  $\beta$  при многошаговой процедуре исключения быстрых переменных. Тот же смысл, что и раньше,



имеет  $\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ , где  $\Lambda'$  – максимальный волновой вектор оставшихся (не исключенных) степеней свободы.

Теперь мы переходим к исследованию члена (9.27), который записывается в следующем виде

$$\mathcal{H}_{(2)} = -\frac{\beta^2}{4} \int d^2 r_1 d^2 r_2 G^2(r_{12}) \cos \vartheta'_1 \cos \vartheta'_2. \quad (9.33)$$

Характерным масштабом  $G(r)$  является  $\Lambda^{-1}$ , в то время как поле  $\vartheta'$  является медленным, то есть мало меняется на масштабе  $\Lambda^{-1}$ . Поэтому, перейдя к переменным  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1/2 + \mathbf{r}_2/2$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , можно разложить  $\vartheta'(\mathbf{R} \pm \mathbf{r}/2)$  (а затем и  $\cos \vartheta'_{1,2}$ ,  $\sin \vartheta'_{1,2}$ ) в ряд по  $\mathbf{r}$ . Главные члены разложения (9.33) записываются следующим образом

$$-\frac{\beta^2}{8} \int d^2 r d^2 R G^2(r) \left\{ \cos(2\vartheta') + \frac{1}{4} r^2 (\nabla \vartheta')^2 \cos(2\vartheta') - \frac{1}{4} r^2 (\nabla \vartheta')^2 \right\},$$

где  $\vartheta' \equiv \vartheta'(\mathbf{R})$ . Коэффициенты в этом выражении определяются интегралами

$$\begin{aligned} \int d^2 r G^2(r) &= \frac{1}{2\pi\alpha^2} \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{dq}{q^3} \approx \frac{\Delta\Lambda}{2\pi\alpha^2\Lambda^3}, \\ \int d^2 r r^2 G^2(r) &= \frac{2}{\pi\alpha^2} \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{dq}{q^5} \approx \frac{2(\Delta\Lambda)}{\pi\alpha^2\Lambda^5}. \end{aligned}$$

Отсюда мы находим поправку к  $\mathcal{H}$ :

$$-\frac{\beta^2\Delta\Lambda}{16\pi\alpha^2\Lambda^5} \int d^2 R \left\{ \Lambda^2 \cos(2\vartheta') + \cos(2\vartheta') (\nabla \vartheta')^2 - (\nabla \vartheta')^2 \right\}. \quad (9.34)$$

Здесь существенен только последний член, который означает наличие поправки к  $\alpha$ :

$$\Delta\alpha = \frac{\beta^2\Delta\Lambda}{8\pi\alpha^2\Lambda^5}. \quad (9.35)$$

Остальные два члена в выражении (9.34) мы обсудим в конце лекции.

Аналогичным образом можно проанализировать и вклад (9.28). Он, однако, оказывается пренебрежимо малым в силу соотношений

$$\int d^2 r r^{2n} G(r) = 0,$$

которые легко проверить непосредственно. Они почти очевидны, поскольку в Фурье-представлении сводятся к производным от  $G(q)$ , взятым в точке  $q = 0$ . Эти производные равны нулю, поскольку  $G(q)$

отлична от нуля только в конечном интервале волновых векторов  $q$ , от  $\Lambda'$  до  $\Lambda$ .

Как обычно, поправку (9.35) можно конвертировать в РГ-уравнение, которое имеет вид  $d\alpha/d\xi = \beta^2/(8\pi\alpha^2\Lambda'^4)$ . Мы сталкиваемся с необходимостью ввести текущее (для данного масштаба) значение параметра  $\gamma$ :  $\gamma = \beta/(\Lambda')^2$ . Тогда РГ-уравнения (9.32,9.35) переписываются в следующем виде

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \left(2 - \frac{1}{4\pi\alpha}\right)\gamma, \quad \frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{\gamma^2}{8\pi\alpha^2}, \quad (9.36)$$

где, как и выше,  $\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ . Напомним, что условием применимости этих уравнений является  $\gamma \ll 1$ . У системы уравнений (9.36) имеется фиксированная точка  $\alpha = \alpha_c$ ,  $\gamma = 0$ , где  $\alpha_c = 1/(8\pi)$ . Проанализируем поведение решения (9.36) вблизи этой фиксированной точки, что соответствует окрестности фазового перехода. Раскладывая уравнения (9.36) по  $\alpha - \alpha_c$ , мы находим

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = 16\pi(\alpha - \alpha_c)\gamma, \quad (9.37)$$

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = 8\pi\gamma^2. \quad (9.38)$$

У системы уравнений (9.37,9.38) имеется первый интеграл

$$C = \gamma^2/2 - (\alpha - \alpha_c)^2. \quad (9.39)$$

Выражая из соотношения (9.39)  $\gamma$  и подставляя результат в уравнение (9.38), мы находим замкнутое уравнение для разности  $\alpha - \alpha_c$

$$\frac{d(\alpha - \alpha_c)}{d\xi} = 16\pi [C + (\alpha - \alpha_c)^2]. \quad (9.40)$$

Отметим, что в силу уравнения (9.38) правая часть уравнения (9.40) всегда положительна.

Поведение решения системы уравнений (9.37,9.40) зависит от знаков первого интеграла  $C$  и разности  $\alpha_{sh} - \alpha_c$ , где  $\alpha_{sh}$  – коротковолновое значение параметра  $\alpha$ . Если  $\alpha_{sh} < \alpha_c$  и  $C < 0$ , тогда при  $\xi \rightarrow \infty$  параметр  $\alpha$  стремится к конечной величине  $\alpha_\infty = \alpha_c - \sqrt{|C|}$ , а  $\gamma$  стремится к нулю. Если  $\alpha_{sh} < \alpha_c$  и  $C = 0$ , тогда при  $\xi \rightarrow \infty$  параметр  $\alpha$  стремится к своему критическому значению  $\alpha_c$ , а  $\gamma$  стремится к нулю. Если же  $C > 0$  или если  $\alpha_{short} > \alpha_c$  тогда  $\alpha$  и  $\gamma$  неограниченно растут при  $\xi \rightarrow \infty$ . Фазовый портрет для системы уравнений (9.37,9.40) приведен на рисунке 9.1, где прямые, разделяющие различные сектора,

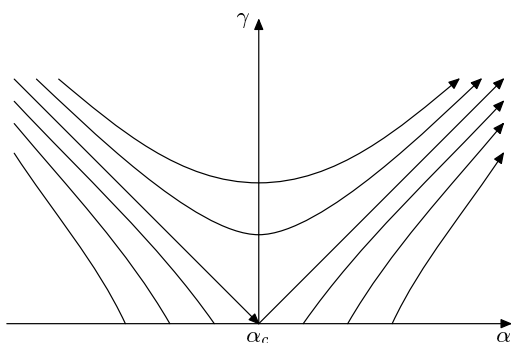


Рис. 9.1: Фазовый портрет системы РГ-уравнений.

соответствуют условию  $C = 0$ . Начальная точка на приведенных на рисунке 9.1 фазовых траекториях определяется, как  $(\alpha_{sh}, \gamma_{sh})$ , где  $\gamma_{sh}$  – коротковолновое (затрабочное) значение параметра  $\gamma$ .

Возвращаясь теперь к определению (9.39), мы находим, что при  $\alpha_{sh} < \alpha_c - \gamma_{sh}/\sqrt{2}$  на больших масштабах  $\alpha$  стремится к постоянному значению, а при  $\alpha_{sh} > \alpha_c - \gamma_{sh}/\sqrt{2}$  параметр  $\alpha$  неограниченно растет при увеличении масштаба. Вспоминая теперь соотношение (9.14), мы заключаем, что при  $\alpha_{sh} < \alpha_c - \gamma_{sh}/\sqrt{2}$  сверхтекучая плотность  $\rho_s$  остается константой на больших масштабах, что соответствует сверхтекучей фазе. При условии же  $\alpha_{sh} > \alpha_c - \gamma_{sh}/\sqrt{2}$  сверхтекучая плотность  $\rho_s$  обращается в ноль на больших масштабах, что соответствует нормальной фазе. Таким образом, при  $\alpha_{sh} = \alpha_c - \gamma_{sh}/\sqrt{2}$  происходит фазовый переход пленки из сверхтекучего состояния в нормальное. На рисунке 9.1 точки, соответствующие этому переходу, лежат на левом луче и соответствуют  $C = 0$ . Ниже точки перехода крупномасштабное значение  $\rho_s$  уменьшается с увеличением температуры, стремясь при приближении к точке перехода к предельному значению, которое определяется соотношением  $\alpha = \alpha_c$ , и совпадает со значением (9.5), которое мы уже обсуждали выше, как граничное.

Строго говоря, утверждение о фазовом переходе пленки из сверхтекучего состояния в нормальное, основанное на обращении  $\alpha$  в бесконечность при неограниченном росте масштаба, не является обоснованным, так как при росте  $\alpha$  и  $\gamma$  мы выходим за пределы применимости уравнений (9.37, 9.38), а затем и за пределы применимости теории возмущений, в рамках которой получены уравнения (9.36). Тем не менее, физически это утверждение представляется обоснованным. Соображения в его пользу были приведены в начале лекции.

Как мы уже убедились, при ренормировке в эффективном функ-

ционале Ландау  $\mathcal{H}$  возникают дополнительные члены разнообразной структуры. Например, можно взять выражение (9.34). Несколько обобщая получающуюся при этом конструкцию, мы можем рассмотреть следующие поправочные члены

$$\mathcal{H}_{sub} = - \int d^2 r \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \cos(n\vartheta), \quad (9.41)$$

или

$$\mathcal{H}_{sub} = - \int d^2 r \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos(n\vartheta) (\nabla\vartheta)^2. \quad (9.42)$$

Величина этих членов, которые генерируются в процессе исключения быстрых переменных, мала в меру малости  $\gamma$ . Поэтому поправки к правым частям уравнений (9.36), которые генерируются за счет (9.41,9.42), малы. Вопрос заключается в том, не могут ли  $\beta_n$ ,  $\lambda_n$  затем вырасти (при росте масштаба) и разрушить всю конструкцию.

Для анализа такой возможности надо сформулировать РГ-уравнения для  $\beta_n$  и  $\lambda_n$ . Можно проверить, что эти уравнения имеют вид

$$\frac{d\gamma_n}{d\xi} = \left(2 - \frac{n^2}{4\pi\alpha}\right) \gamma_n + S_n, \quad \frac{d\lambda_n}{d\xi} = -\frac{n^2}{4\pi\alpha} \lambda_n + \tilde{S}_n, \quad (9.43)$$

где  $\gamma_n = \beta_n/(\Lambda')^2$ . В уравнении (9.43)  $S_n$  и  $\tilde{S}_n$  – источники, порождаемые главным членом (9.17), а также самими дополнительными членами (9.41,9.42). Источники эти могут быть оценены как  $S_n \sim \gamma^n$ ,  $\tilde{S}_n \sim \gamma^n$ . Отрицательность первых членов в уравнениях (9.43) означает, что  $\gamma_n$  и  $\lambda_n$  не растут самопроизвольно, а остаются порядка  $\gamma_n \sim S_n$ ,  $\lambda_n \sim \tilde{S}_n$ , то есть члены (9.41,9.42) всегда остаются несущественными.

Интересным представляется вопрос о том, каков будет характер перехода в том случае, если затравочное значение параметра  $\gamma$ ,  $\gamma_{sh}$ , не является малым. Физически это означает, что плотность вихрей не является низкой, то есть расстояние между вихрями оказывается порядка размера кора вихря. Однако большая плотность вихрей не имеет прямого отношения к характеру перехода. Он определяется балансом энергии и энтропии единичного вихря. Энергия же его остается логарифмической и в присутствии большой плотности вихрей, если такая среда состоит из связанных вихревых пар, то есть является “диэлектрической”, что можно учесть при помощи “диэлектрической проницаемости”. Также естественно ожидать, что  $\gamma$  падает с ростом расстояния, что соответствует малой плотности связанных пар большого размера. В этом случае характер фазового перехода будет таким же, как и для малого затравочного значения  $\gamma_{sh}$ .

### 9.3 Завихренность и теплоемкость

Возвратимся теперь к парной корреляционной функции завихренности. Произведем преобразование  $\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 = [\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)]/2$ . Средние  $\langle \cos \vartheta \rangle$  и  $\langle \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) \rangle$  чувствительны к флуктуациям  $\vartheta$  на больших масштабах и потому являются пренебрежимо малыми (сравни сделанный выше анализ в терминах затравочных величин). Поэтому из (9.19) следует

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 \langle \omega(\mathbf{r}_1)\omega(\mathbf{r}_2) \rangle \approx -\frac{\beta^2}{2} \langle \cos[\vartheta(\mathbf{r}_1) - \vartheta(\mathbf{r}_2)] \rangle. \quad (9.44)$$

Среднее в правой части выражения (9.44) можно вычислять при помощи той же процедуры, шаг за шагом интегрируя по быстрым переменным, постепенно уменьшая текущую обрезку  $\Lambda'$ . Легко проверить непосредственно, произведя интегрирование по части степеней свободы в поле  $\vartheta$ , что множитель, приобретаемый  $\cos[\vartheta(\mathbf{r}_1) - \vartheta(\mathbf{r}_2)]$ , в точности воспроизводит ренормировку  $\beta$ , описываемую (9.32). Это справедливо для  $\Lambda' > r_{12}^{-1}$ . Когда же мы достигнем  $\Lambda' \sim r_{12}^{-1}$ , то  $\langle \cos[\vartheta'(\mathbf{r}_1) - \vartheta'(\mathbf{r}_2)] \rangle \sim 1$  (так как это среднее определяется степенями свободы с волновыми векторами  $\sim r_{12}^{-1}$ ). В результате мы находим

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 \langle \omega(\mathbf{r}_1)\omega(\mathbf{r}_2) \rangle \sim \frac{\gamma^2}{r_{12}^4}, \quad (9.45)$$

где  $\gamma$  берется на масштабе  $r_{12}$ .

Как мы уже пояснили,  $C < 0$  для температуры ниже точки перехода, а  $C > 0$  соответствует температуре выше точки перехода. Поэтому вблизи температуры перехода  $C \propto T - T_c$ . Как следует из уравнения (9.40), при  $C > 0$  решение для  $\alpha$  имеет следующий вид

$$\alpha - \alpha_c = \sqrt{C} \tan[16\pi\sqrt{C}(\xi - \xi_0)], \quad \gamma = \sqrt{2C} \cos^{-1}[16\pi\sqrt{C}(\xi - \xi_0)]. \quad (9.46)$$

Отсюда следует, что  $\alpha$  и  $\gamma$  стремятся к бесконечности, когда аргумент тангенса в (9.46) приближается к  $\pi/2$ . Разумеется, решение (9.46) работает только до некоторого предела, поскольку при его выводе величина  $\gamma$  предполагалась малой. При малых  $C$  (то есть вблизи точки перехода)  $\gamma$  становится порядка единицы при  $\xi = \xi_c$ , где  $\xi_c - \xi_0 \propto (T - T_c)^{-1/2}$ . С величиной  $\xi_c$  связан некоторый масштаб  $r_c$ , так что  $\xi_c = \ln(\Lambda r_c)$ , этот масштаб  $r_c$  естественно называть корреляционным радиусом. Действительно, при малых  $\gamma$ , то есть при  $r \ll r_c$ , корреляционные функции типа (9.45) сохраняют степенной характер, а на расстояниях  $r > r_c$  следует ожидать быстрого спадания корреляций за счет их разрушения распаренными вихрями. Мы можем записать поведение критического

радиуса в виде

$$r_c \propto \exp \left( \sqrt{\frac{T_*}{T - T_c}} \right),$$

где  $T_*$  – некоторая константа. Вспоминая теперь физическую картину, согласно которой флуктуации областей размера  $r_c$  независимы и имеют характерную энергию порядка температуры, мы находим для сингулярного вклада в свободную энергию

$$F_{sing} \sim T \frac{L^2}{r_c^2} \propto \exp \left( -2 \sqrt{\frac{T_*}{T - T_c}} \right),$$

где  $L$  – размер системы. Такого сорта сингулярность непросто фиксировать экспериментально.

### Задача 9.1

Найти значения “источников”  $S_2$  и  $\tilde{S}_2$ , фигурирующих в РГ-уравнениях (9.43).

### Решение задачи 9.1

Соответствующие значения могут быть найдены, если принять во внимание первый и второй члены в поправке (9.34). В результате мы получаем

$$S_2 = \tilde{S}_2 = \frac{\gamma^2}{16\pi\alpha^2}.$$

## Лекция 10

# Критическая динамика

В настоящей лекции мы рассмотрим особенности динамики конденсированной среды вблизи точки фазового перехода второго рода, которую обычно именуют критической динамикой. Критическая динамика является не столь универсальной, как статические свойства среды. Напомним, что характер особенностей в статических величинах зависит только от числа компонент параметра порядка. В то же время, при данном числе компонент параметра порядка критическая динамика может быть самой разной. Здесь мы будем изучать простейший случай: так называемую чисто релаксационную динамику параметра порядка. Этот случай является одним из самых важных, так как он часто встречается экспериментально. Теория критической динамики представлена в обзоре [51] (смотри также [14]). Диаграммная техника, которую мы используем, была впервые развита Уайлдом [7] (при анализе турбулентности), а затем обобщена в работе [52].

### 10.1 Эффективное действие

Динамическое уравнение для чисто релаксационной динамики параметра порядка имеет вид

$$\partial_t \varphi = f, \quad f = \Gamma^{-1} \left( -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} + \zeta \right), \quad (10.1)$$

где  $\Gamma$  – кинетический коэффициент,  $\mathcal{F}$  – функционал Ландау и  $\zeta$  – Ланжевеновские силы (белый шум), которые представляют воздействие коротковолновых (микроскопических) степеней свободы на динамику параметра порядка (который является макроскопической переменной). Корреляционные функции  $\zeta$  имеют характерные атомные

размеры и времена. Так как мы рассматриваем процессы, которые происходят на макроскопических масштабах и временах, корреляционные функции  $\zeta$  могут считаться  $\delta$ -коррелированными во времени и пространстве. Это также означает, что статистика  $\zeta$  может считаться Гауссовой. Дело в том, что в наблюдаемые величины входят интегралы (по времени и по пространству) от  $\zeta$ , которые могут интерпретироваться, как суммы большого количества случайных чисел. В силу центральной предельной теоремы такая сумма обладает Гауссовой статистикой. Такая статистика однозначно определяется парной корреляционной функцией случайной величины. В нашем случае парная корреляционная функция равна

$$\langle \zeta(t_1, \mathbf{r}_1) \zeta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 2T\Gamma \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (10.2)$$

где  $T$  – температура. Выражение (10.2) для корреляционной функции Ланжевеновских сил гарантирует, что стационарная функция распределения вероятности равна  $\exp[(F - \mathcal{F})/T]$  (смотри приложение А.2).

Напомним, что функционал Ландау  $\mathcal{F}$  для параметра порядка  $\varphi$  равен

$$\mathcal{F} = \int d^d r \left\{ \frac{a}{2} \varphi^2 + \frac{b}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\lambda}{24} \varphi^4 \right\}, \quad (10.3)$$

где мы сохранили только четные члены, считая, что нечетные члены в  $\mathcal{F}$  отсутствуют за счет какой-либо симметрии. Подставляя (10.3) в уравнение (10.1), мы находим

$$\Gamma \partial_t \varphi = -a\varphi + b\nabla^2 \varphi - \frac{\lambda}{6} \varphi^3 + \zeta. \quad (10.4)$$

Отметим, что член второго порядка по  $\varphi$  в функционале Ландау производит линейный член в уравнении (10.4), а член четвертого порядка по  $\varphi$  в функционале Ландау производит нелинейный член (третьего порядка) в уравнении (10.4).

Ранее мы изучали одновременные корреляционные функции параметра порядка, которые могут быть найдены из стационарной функции распределения вероятности  $\exp[(F - \mathcal{F})/T]$ . Теперь мы будем интересоваться корреляциями параметра порядка во времени, которые определяются разновременными корреляционными функциями  $\varphi$ . Для их аналитического определения недостаточно знать стационарную функцию распределения, а надо прямо использовать уравнение (10.1). Одним из возможных путей вычисления корреляционных функций является решение уравнения (10.1), в результате которого  $\varphi$  выражается через шум  $\zeta$ . Затем, чтобы вычислить, скажем, парную корреляционную функцию  $\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \varphi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$  необходимо подставить сюда выражение параметра порядка через  $\zeta$  и усреднить результат по статистике



$\zeta$ . К сожалению, невозможно явно выразить  $\varphi$  через  $\zeta$ , скажем, из уравнения (10.4). Это можно сделать только в виде ряда по нелинейному члену в уравнении (10.4), то есть в виде ряда по  $\lambda$ . Соответственно, намеченный выше прямой путь позволяет сформулировать теорию возмущений по  $\lambda$  для корреляционных функций  $\varphi$ . Впервые такого рода процедура построения теории возмущений по нелинейному члену в динамическом уравнении была развита (в рамках теории турбулентности) Уайлдом [7].

Далее мы идем иным путем, который позволяет выразить разновременные корреляционные функции  $\varphi$  в виде функционального интеграла [52, 53, 54, 55] подобно тому, как это было сделано для одновременных корреляционных функций. Представление в виде функционального интеграла позволяет производить некоторые важные преобразования переменных (смотри, например, лекцию 9), стандартным образом формулировать ренорм-групповое преобразование, а также, в принципе, вычислять и непертурбативные эффекты, которые невозможно получить в рамках теории возмущений. Техника же Уайлда (теория возмущений) получается из представления корреляционных функций в виде функционального интеграла подобно тому, как строилась теория возмущений в статическом случае, на основе распределения Гиббса.

Выведем представление в виде функционального интеграла для разновременных корреляционных функций параметра порядка. Как уже было сказано, при вычислении корреляционных функций  $\varphi$  можно использовать решения уравнения (10.1) для  $\varphi$  в терминах шума  $\zeta$ . Вместо этого можно интегрировать по произвольным функциям  $\varphi$ , учитывая уравнение (10.1), как функциональную  $\delta$ -функцию. Например, произведение решений уравнения (10.1) можно записать в следующем виде

$$N^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \delta(\partial_t \varphi - f) \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n). \quad (10.5)$$

Интегрирование здесь производится по всем функциям  $t$  и  $\mathbf{r}$ . Главное свойство функциональной  $\delta$ -функции заключается в том, что

$$\int \mathcal{D}\varphi \delta(\varphi - \psi) \Phi(\varphi) = \Phi(\psi),$$

где  $\Phi(\varphi)$  – произвольный функционал. Фактор же  $N$  в (10.5) является нормировочной константой:

$$N = \int \mathcal{D}\varphi \delta(\partial_t \varphi - f). \quad (10.6)$$

Вычислим константу  $N$  для случая, когда функция аппроксимируется своими значениями в дискретном наборе точек (по времени и пространству), а функциональный интеграл является многократным интегралом по значениям функции в этих точках. Тогда вместо уравнения (10.1) необходимо использовать разностное уравнение

$$\frac{\varphi_{n+1}(\mathbf{r}_j) - \varphi_n(\mathbf{r}_j)}{\epsilon} - f_n(\mathbf{r}_j) = 0, \quad (10.7)$$

где  $\mathbf{r}_j$  – точки пространственной решетки, а индекс  $n$  нумерует временные точки, и  $\epsilon$  – шаг по времени. Подчеркнем, что мы приняли в (10.7) запаздывающую регуляризацию: “сила”  $f$ , определяющая разность  $\varphi_{n+1} - \varphi_n$ , берется в меньший момент времени  $t_n$ . Именно такая регуляризация будет подразумеваться в дальнейшем. Функциональный интеграл является многократным интегралом по значениям поля  $\varphi$  на решетке из  $N_1 \times N_2$  точек, где  $N_1$  – число точек пространственной решетки и  $N_2$  – число шагов по времени. А функциональная  $\delta$ -функция является теперь произведением обычных  $\delta$ -функций, взятых во всех  $N_1 \times N_2$  точках, с аргументами, определяемыми уравнением (10.7). Тогда

$$N = \prod_{n,j} \int d\varphi_n(\mathbf{r}_j) \delta \left[ \frac{\varphi_{n+1}(\mathbf{r}_j) - \varphi_n(\mathbf{r}_j)}{\epsilon} - f_n(\mathbf{r}_j) \right] = \epsilon^{N_1 N_2}, \quad (10.8)$$

так как интеграл в (10.8) может вычисляться последовательно, шаг за шагом, вследствие запаздывающей регуляризации.

Преобразуем функциональную  $\delta$ -функцию в (10.5) в экспоненту. Для этого мы используем хорошо известное соотношение для обычной  $\delta$ -функции:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx).$$

Переписывая  $\delta$ -функции, как такие интегралы, во всех точках нашей  $N_1 \times N_2$  пространственно-временной решетки, мы находим

$$N^{-1} \delta(\partial_t \varphi - f) = \prod_{n,j} \int \frac{\Delta^d}{2\pi} dp_n(\mathbf{r}_j) \times \exp \{ i \Delta^d p_n(\mathbf{r}_j) [\varphi_{n+1}(\mathbf{r}_j) - \varphi_n(\mathbf{r}_j) - \epsilon f_n(\mathbf{r}_j)] \},$$

где  $\Delta$  – шаг пространственной решетки и  $d$  – размерность пространства. Таким образом, возникло новое поле  $p$ , которое в непрерывном пределе плавно зависит от времени и координат, а произведение

$\prod \int dp_{nj}$  может быть записано, как функциональный интеграл  $\int \mathcal{D}p$ . В результате мы находим

$$N^{-1} \delta(\partial_t \varphi - f) = N^{-1} \int \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int dt d^d r [p \partial_t \varphi - pf] \right\}, \quad (10.9)$$

где нормировочная константа равна  $\mathcal{N} = (\Delta^d/2\pi)^{N_1 N_2}$ . Мы видим, что нормировочная константа  $\mathcal{N}$  независима от всех параметров, определяющих динамику  $\varphi$  (включая поля  $h$  и  $\zeta$ ).

Возвращаясь теперь к выражению (10.5), мы заключаем, что корреляционные функции  $\varphi$  могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle &= N^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}p \\ &\times \left\langle \exp \left\{ i \int dt d^d r [p \partial_t \varphi - pf] \right\} \right\rangle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n), \end{aligned}$$

где усреднение в правой части этого соотношения производится по статистике  $\zeta$ . Это усреднение может быть произведено явно, так как статистика  $\zeta$  является Гауссовой. В результате мы получаем из (10.1)

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle &= N^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}p \\ &\times \exp \left\{ i \int dt d^d r \left[ p \partial_t \varphi + \frac{1}{\Gamma} p \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} + i \frac{T}{\Gamma} p^2 \right] \right\} \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \varphi(t_n, \mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Удобно перейти к новому полю  $p \rightarrow \Gamma p$ . Включая фактор  $\Gamma^{N_1 N_2}$  в переопределение нормировочной константы  $\mathcal{N}$ , мы получаем окончательно [53, 54, 55]

$$\langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots \rangle = N^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}p \exp(i\mathcal{I}) \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \dots, \quad (10.10)$$

$$\mathcal{I} = \int dt d^d r \left[ \Gamma p \partial_t \varphi + p \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} + iT \Gamma p^2 \right]. \quad (10.11)$$

По аналогии с квантовой теорией поля мы будем называть величину  $\mathcal{I}$  эффективным действием или просто действием. Для нашей конкретной проблемы

$$\mathcal{I} = \int dt d^d r \left[ \Gamma p \partial_t \varphi + ap\varphi + b\nabla p \nabla \varphi + \frac{\lambda}{6} p \varphi^3 - ph + iT \Gamma p^2 \right], \quad (10.12)$$

где мы ввели также внешнее “магнитное поле”  $h$ .

Полезно включить в рассмотрение не только корреляционные функции параметра порядка  $\varphi$ , но также и корреляционные функции, включающие вспомогательное поле  $p$ . Далее мы будем использовать парную корреляционную функцию

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) p(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &= \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}p \exp(i\mathcal{I}) \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) p(t_2, \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (10.13)$$

которую мы будем называть Гриновской функцией. Эта функция определяет отклик системы на внешнее “магнитное поле”  $h$ . А именно, при вариации поля  $\delta h$  изменяется также и среднее  $\langle \varphi \rangle$ , причем эти вариации связаны следующим образом

$$\delta \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \rangle = -i \int dt_2 d^d r_2 G(t_1, t_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta h(t_2, \mathbf{r}_2), \quad (10.14)$$

как следует из уравнений (10.12, 10.13). Причинность диктует условие  $G = 0$  при  $t_1 < t_2$ . Конечно, при  $h = 0$  (или при однородном во времени и пространстве  $h$ ) Гриновская функция  $G$  зависит только от разностей  $t_1 - t_2$  и  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Заметим, что корреляционные функции вспомогательного поля  $\langle p(t_1, \mathbf{r}_1) \dots p(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$  равны нулю. Чтобы доказать это свойство, удобно вернуться к представлению корреляционных функций до явного их усреднения по шуму  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} \langle p(t_1, \mathbf{r}_1) \dots p(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle &= \mathcal{N}^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}p \\ &\left\langle \exp \left\{ i \int dt d^d r [\Gamma p \partial_t \varphi - p f] \right\} \right\rangle_{\zeta} p(t_1, \mathbf{r}_1) \dots p(t_n, \mathbf{r}_n). \end{aligned}$$

Интегрирование экспоненты по  $\varphi$  дает функциональную  $\delta$ -функцию  $\delta(p)$ , и, следовательно, интеграл в правой части этого выражения равен нулю. В частности, равны нулю среднее  $\langle p \rangle$  и парная корреляционная функция  $\langle p(t_1, \mathbf{r}_1) p(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$ .

Поясним, каким образом получается функциональная  $\delta$ -функция  $\delta(p)$  при интегрировании по  $\varphi$ . Для этого надо снова использовать дискретное представление по времени

$$\int dt d^d r (\Gamma p \partial_t \varphi - p f) \rightarrow \sum_n \int d^d r [\Gamma p_n (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - \epsilon p_n f_n].$$

Интегрирование по  $\varphi$  следует производить в “антихронологическом” порядке: сначала по значению функции в последний момент времени  $\varphi_{last}$ , а затем в порядке уменьшения номера  $n$ . При этом за счет члена  $p_n \varphi_{n+1}$  каждый раз будет возникать  $\delta$ -функция от  $p_n$ . Подставляя

затем  $p_n = 0$ , мы убеждаемся, что из подынтегрального выражения исчезает зависимость от  $\varphi_n$  везде, кроме члена  $p_{n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1})$ , который обеспечивает на следующем шаге появление очередной  $\delta$ -функции (от  $p_{n-1}$ ). Таким образом, указанное свойство тесно связано с выбранной нами запаздывающей регуляризацией.

Докажем теперь флуктуационно-диссипационную теорему (ФДТ). Для этого сдвинем вспомогательное поле  $p$ :

$$\bar{p} = p - \frac{i}{2T} \partial_t \varphi. \quad (10.15)$$

Выражая эффективное действие (10.11) через новое поле  $\bar{p}$ , мы находим

$$\mathcal{I} = \int dt d^d r \left[ \frac{i\Gamma}{4T} (\partial_t \varphi)^2 + \bar{p} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} + iT\Gamma \bar{p}^2 \right], \quad (10.16)$$

где мы опустили граничный член, происходящий из  $\int dt d^d r \delta \mathcal{F} / \delta \varphi \partial_t \varphi$ . Как следует из (10.16), эффективное действие, выраженное через  $\varphi, \bar{p}$ , инвариантно относительно изменения знака времени  $t \rightarrow -t$ . Отсюда следует, в частности, что парная корреляционная функция  $\langle \bar{p}(t, \mathbf{r}) \bar{p}(0, \mathbf{0}) \rangle$  инвариантна относительно  $t \rightarrow -t$ . Выписывая это условие через начальное поле  $p$ , мы находим

$$\partial_t F(t, \mathbf{r}) = iT [G(t, \mathbf{r}) - G(-t, \mathbf{r})], \quad (10.17)$$

где  $F$  – парная корреляционная функция  $\varphi$ :

$$F(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) \varphi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle. \quad (10.18)$$

Переходя к Фурье-компонентам, мы находим

$$F(\omega) = -\frac{T}{\omega} [G(\omega) - G(-\omega)]. \quad (10.19)$$

Это соотношение является не чем иным, как классическим вариантом ФДТ, так как  $F$  является парной корреляционной функцией наблюдаемой величины  $\varphi$ , а разность в его правой части дает мнимую часть соответствующей линейной восприимчивости, как это видно из (10.14).

Как мы уже упоминали, вследствие причинности функция Грина  $G(t)$  равна нулю для отрицательных  $t$ . Поэтому ее преобразование Фурье  $G(\omega)$  является функцией, аналитической в верхней полуплоскости. Это свойство позволяет получить явное выражение для одновременной парной корреляционной функции  $\varphi$  через Гриновскую функцию.

Действительно, одновременная парная корреляционная функция записывается в виде следующего интеграла

$$F(t=0) = \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) = -T \int \frac{d\omega}{2\pi\omega} [G(\omega) - G(-\omega)] . \quad (10.20)$$

Сдвинем контур интегрирования в нижнюю полуплоскость. Так как функция  $G(-\omega)$  является там аналитической, интеграл от второго члена в правой части (10.20) равен нулю, то есть после сдвига  $G(-\omega)$  может быть опущена. Далее, сдвинем теперь контур интегрирования в верхнюю полуплоскость. Так как  $G(\omega)$  аналитична в верхней полуплоскости, вклад в интеграл будет производиться только полюсом в точке  $\omega = 0$ . Выписывая этот полюсной вклад, мы находим

$$F(t=0) = -iT G(\omega=0) . \quad (10.21)$$

Это соотношение позволяет весьма просто восстанавливать одновременные функции  $\varphi$  по Гриновской функции.

## 10.2 Техника Уайлда

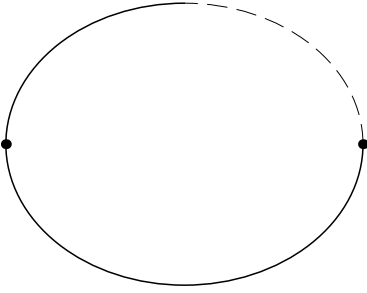
Эффективное действие (10.12) является суммой членов первого порядка по полю  $p$ , а также второго и четвертого порядка по полям  $\varphi$  и  $p$ . Таким образом, по своей формальной структура действие близко к структуре соответствующего функционала Ландау. Это действие позволяет сформулировать теорию возмущений для вычисления корреляционных функций  $\varphi$  и  $p$ , если разложить  $\exp(i\mathcal{I})$  в соотношениях типа (10.10) в ряд по члену четвертого порядка в действии. (Как и в статике, это будет разложением по  $\lambda$ .) Каждый член этого разложения сводится к Гауссову интегралу и, следовательно, может быть выражен через затравочные значения корреляционных функций (10.13, 10.18). Явные выражения для этих затравочных функций имеют следующий вид

$$G_0(t, \mathbf{r}) = - \int \frac{d^d q d\omega}{(2\pi)^{d+1}} \frac{\exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r})}{\Gamma\omega + ia + ibq^2} , \quad (10.22)$$

$$F_0(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d^d q d\omega}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2T\Gamma e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{\Gamma^2\omega^2 + (a + bq^2)^2} , \quad (10.23)$$

где мы считаем  $a > 0$ . Отметим следующее соотношение

$$F_0(\omega, q) = -G_0(\omega, q)(2T\Gamma)G_0(-\omega, q) . \quad (10.24)$$

Рис. 10.1: Первая поправка к нормировочной константе  $\mathcal{N}$ .

Разумеется, интеграл

$$\int d^d r \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) F(0, \mathbf{r}) = \frac{T}{a + bq^2} = -iT G_0(\omega = 0, q)$$

воспроизводит выражение для затравочной одновременной парной корреляционной функции. Напомним, что корреляционная функция  $\langle pp \rangle$  равна нулю.

Рассмотрим сначала ряд теории возмущений для нормировочной константы  $\mathcal{N}$ . Этот ряд может быть представлен на диаграммном языке. Первый поправка к  $\mathcal{N}$  соответствует диаграмме, приведенной на рисунке 10.1. Здесь сплошная линия соответствует корреляционной функции (10.23), смешанная линия представляет Гриновскую функцию (10.22) (пунктирная половина соответствует полю  $p$ ), а черная точка представляет параметр  $\lambda$ . Аналитическое выражение, соответствующее этой диаграмме, содержит фактор  $G(t = 0, \mathbf{r} = 0)$ , который определен не очень хорошо, поскольку Гриновская функция  $G(t)$  испытывает скачок при  $t = 0$ . Чтобы понять, чему же равна величина  $G(t = 0, \mathbf{r} = 0)$ , мы должны вернуться к дискретной версии нашей теории. Тогда из-за принятой нами запаздывающей поляризации Гриновская функция при совпадающих временах оказывается равной нулю. Это следует, например, из того, что в дискретном аналоге (10.14)  $\delta\langle\varphi\rangle$  может знать про значения поля  $h$  в прошлом, но не в той же самой временной точке. Таким образом, мы должны полагать  $G(t = 0) = 0$ . Поэтому первая поправка к  $\mathcal{N}$  равна нулю.

Поправки более высокого порядка к  $\mathcal{N}$  также равны нулю, поскольку все они либо содержат фактор  $G(t = 0) = 0$ , либо замкнутую петлю из  $G$ -линий типа представленной на рисунке 10.2. В аналитическом виде этой петле соответствует произведение  $G(t_1 - t_2)G(t_2 - t_3) \dots G(t_n - t_1)$ , где времена  $t_j$  “приписаны” вершинам. Среди аргументов Гриновских функций в этом произведении по крайней мере один отрицателен,

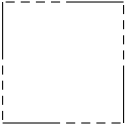
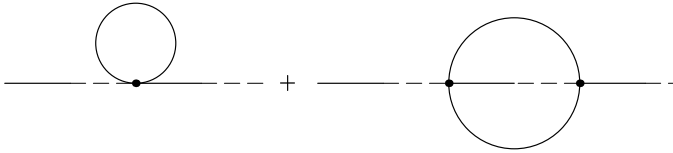
Рис. 10.2: Замкнутая петля из  $G$ -линий.

Рис. 10.3: Первые поправки к Гриновской функции.

и, поскольку соответствующая Гриновская функция равна нулю, равно нулю и все произведение. Такого сорта петли неизбежно возникают, поскольку в каждой вершине “живет” одно поле  $p$ , то есть к каждой вершине присоединяется своим  $p$ -концом некоторая  $G$ -линия. Чтобы построить замкнутую петлю из  $G$ -линий, можно стартовать с любой вершины, отметив  $G$ -линию, которая присоединяется к ней своим  $p$ -концом. Затем надо взять вершину, к которой эта  $G$ -линия присоединяется своим  $\varphi$ -концом, и проделать с ней то же самое, отметив новую  $G$ -линию. Повторяя эту процедуру, мы рано или поздно вернемся к одной из уже пройденных вершин, образовав петлю типа представленной на рисунке 10.2. Замкнутую на себя  $G$ -линию можно рассматривать, как частный случай обсуждаемой петли. Таким образом, флуктуационных поправок к  $\mathcal{N}$  нет, и  $\mathcal{N}$  остается независимым от параметров эффективного действия.

Далее, исследуем ряд теории возмущений для Гриновской функции  $G$ . Как обычно, несвязные диаграммы не вносят никакого вклада в Гриновскую функцию. В данном случае причина этого тривиальна: все блоки без внешних концов равны нулю по тем же причинам, по которым отсутствуют поправки к  $\mathcal{N}$ . Диаграммы, соответствующие первой по  $\lambda$  поправке к  $G$ , являются однопетлевыми диаграммами, на которых петли соответствуют  $G(t=0)$  и  $F(t=0)$ . Поскольку  $G(t=0)=0$ , реально имеется только один однопетлевой вклад в Гриновскую функцию, представленный диаграммой на рисунке 10.3. На том же рисунке представлена двухпетлевая поправка к Гриновской функции. Отметим, что имеется единственная двухпетлевая диаграмма, дающая ненулевой вклад в Гриновскую функцию.



Рассмотрим вклады более высокого порядка в  $G$ . Прежде всего, на соответствующих диаграммах можно выделить “мостики” (“мостиком” является  $G$ -линия или  $F$ -линия, по которой диаграмма может быть разрезана на две несвязные части), соединяющие “собственно-энергетические” блоки. Можно проверить, что диаграммы, где имеется хотя бы один  $F$ -мостик, дают нулевой вклад в  $G$ . Дело в том, что тогда найдется хотя бы один “собственно-энергетический” блок, содержащий петлю из Гриновских функций типа представленной на рисунке 10.2, которая соответствует произведению  $G(t_1 - t_2)G(t_2 - t_3) \dots G(t_n - t_1)$ , равному, как мы уже объяснили, нулю. Таким образом, мы можем принимать во внимание только диаграммы с  $G$ -мостиками. Осуществляя суммирование “лестницы”, состоящей из собственно-энергетических блоков и  $G$ -мостиков, мы получаем стандартное соотношение

$$G(\omega, q) = -\frac{1}{\Gamma\omega + ia + ibq^2 + \Sigma}, \quad (10.25)$$

где  $\Sigma$  – “собственно-энергетическая” функция.

Два первых вклада в  $\Sigma$ , соответствующие диаграммам, приведенным на рисунке 10.3, в аналитическом виде записываются следующим образом

$$\Sigma^{(1)}(\omega, q) = \frac{i\lambda}{2} F_0(t=0, r=0), \quad (10.26)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(\omega, q) = & -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2+2d}} \\ & \times F_0(\omega_1, \mathbf{q}_1) F_0(\omega_2, \mathbf{q}_2) G_0(\omega + \omega_1 + \omega_2, \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2). \end{aligned} \quad (10.27)$$

Очевидно, что при  $\omega = 0$  выражение (10.26) сводится к статической собственно-энергетической функции, как это и должно быть в соответствии с (10.21). Можно также проверить, что и выражение (10.27) при  $\omega = 0$  сводится к двухпетлевому вкладу в статическую собственно-энергетическую функцию. Для этого надо выразить  $F$ -функцию из (10.19) и подставить в (10.27). Комбинируя затем аналитические свойства  $G$ -функций и свойства симметрии подынтегрального выражения, можно свести интегралы по частотам к вычетам. После этого и получится статическое выражение.

Исследуем теперь диаграммный ряд для парной корреляционной функции. Конечно, в силу соотношения (10.19) функция  $F$  сводится к Гриновской функции  $G$ . Тем не менее, поучительно отдельно изучить теорию возмущений для  $F$ . Одно- и двухпетлевые поправки к  $F$  соответствуют диаграммам, представленным на рисунке 10.4. Первые диаграммы имеют такую же структуру, как и для поправок к Гриновским функциям, а последняя диаграмма представляет собой нечто

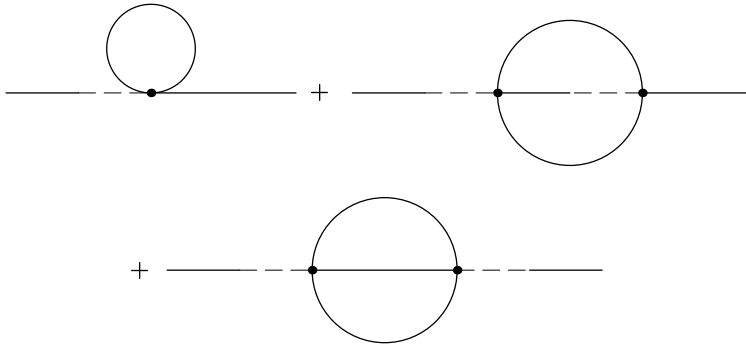


Рис. 10.4: Первые поправки к парной корреляционной функции.

новое. Она содержит блок, который можно назвать “поляризационным”, от которого в двух направлениях расходятся Гриновские функции. Затравочным значением поляризационного блока можно считать фактор  $2T\Gamma$  в соотношении (10.24). Тогда на каждой диаграмме, представляющей вклад в  $F$ , имеется только один такой “поляризационный” блок, от которого в две стороны расходятся “лестницы”, собирающиеся в Гриновские функции. Поэтому парная корреляционная функция записывается в следующем виде

$$F(\omega, q) = -G(\omega, q)[2T\Gamma + 2\Pi(\omega, q)]G(-\omega, q). \quad (10.28)$$

где “поляризационная функция”  $\Pi$  определяется суммой диаграмм, представляющих поляризационные блоки. Сравнивая (10.25) и (10.28), мы заключаем, что (10.19) ведет к соотношению

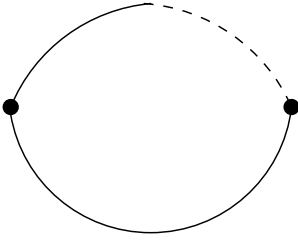
$$\Sigma(\omega, q) - \Sigma(-\omega, q) = \frac{2\omega}{T}\Pi(\omega, q). \quad (10.29)$$

Вклад, соответствующий диаграмме, представленной на рисунке 10.4, в аналитическом виде записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(\omega, q) &= \frac{\lambda^2}{12} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d^d q_1 d^d q_2}{(2\pi)^{2+2d}} \\ &\times F_0(\omega_1, \mathbf{q}_1) F_0(\omega_2, \mathbf{q}_2) F_0(\omega + \omega_1 + \omega_2, \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Можно, используя (10.19), непосредственно проверить связь (10.29) для  $\Sigma^{(2)}$  и  $\Pi^{(2)}$ , определяемых выражениями (10.27) и (10.30).

Выше мы привели формулировку в виде функционального интеграла для вычисления разновременных корреляционных функций и сформулировали некоторые свойства диаграммной техники Уайлда. В

Рис. 10.5: Дающая логарифм  $F - G$  петля.

своем общем виде эта схема работает для произвольной динамической задачи. Теперь же мы приступаем к исследованию собственно критической динамики, то есть особенностей разновременных корреляционных функций параметра порядка вблизи точек фазовых переходов второго рода и критических точек.

Естественно ожидать, что вблизи точек фазовых переходов второго рода такие корреляционные функции, как (10.25) или (10.28), обладают скейлинговым поведением, то есть что зависимость от времени не разрушает степенного характера поведения корреляционных функций. Например, при  $T = T_c$  следует ожидать

$$F(t, q) = \frac{1}{q^{2-\eta}} \phi_1(tq^z), \quad G(\omega, q) = \frac{1}{q^{2-\eta}} \phi_2(\omega/q^z), \quad (10.31)$$

где  $\eta$  – аномальная экспонента (одновременной) парной корреляционной функции, введенная в лекции 2, а  $z$  – новый (динамический) критический индекс. В выражении (10.31)  $\phi_1, \phi_2$  – некоторые функции своего аргумента. Функции  $\phi_1(x), \phi_2(x)$  стремятся к константам при  $x \rightarrow 0$  и стремятся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . В окрестности же точки фазового перехода

$$F(t, q) = \frac{1}{q^{2-\eta}} \bar{\phi}_1(r_c, tq^z), \quad G(\omega, q) = \frac{1}{q^{2-\eta}} \bar{\phi}_2(qr_c, \omega/q^z), \quad (10.32)$$

где  $r_c$  – критический радиус.

Как и в статике, для релаксационной динамики размерность  $d = 4$  является маргинальной (пограничной). В этом случае поправки к затравочным значениям корреляционных функций сводятся к логарифмической ренормировке параметров, входящих в эти функции. Например, первая поправка к вершинной функции определяется петлей, составленной из  $F$ -линии и  $G$ -линии, показанной на рисунке 10.5. Можно попытаться исследовать такие корреляционные функции, как (10.25) или (10.28), выделяя в ряду теории возмущений для этих объектов

главные последовательности. Как и в статике, главным членам соответствуют паркетные диаграммы. Поэтому можно сформулировать уравнения на ренормированные величины, полученные в результате суммирования паркетной последовательности (сравни лекцию 3). В частности, таким способом получается то же уравнение на вершинную функцию, что и в статике. Единственной новостью по сравнению со статикой является ренормировка кинетического коэффициента  $\Gamma$ .

### 10.3 Ренорм-групповая процедура

Как и в статике, наиболее удобным путем вычисления ренормировок является ренорм-групповая процедура (смотри лекцию 4). Мы приступаем к рассмотрению ренормировки эффективного действия (10.12) в пространстве размерности 4. Далее мы имеем в виду построение  $\epsilon$ -разложения с тем, чтобы оценить динамический индекс  $z$  при  $d = 3$ .

Произведем элементарный шаг ренорм-групповой процедуры. Разделим оба поля  $\varphi$  и  $p$  на быструю и медленную компоненты:  $\varphi = \varphi' + \tilde{\varphi}$  и  $p = p' + \tilde{p}$ , где  $\tilde{\varphi}$  и  $\tilde{p}$  – быстрые компоненты, содержащие волновые вектора  $\Lambda' < q < \Lambda$ . По частотам же мы никаких ограничений вводить не будем. (Похожая схема применялась для смектиков, смотри лекцию 6, когда ограничивались волновые вектора только в плоскости, параллельной смектическим слоям.) Функция распределения вероятности в нашем случае равна  $\exp(i\mathcal{I})$ . Поэтому элементарный шаг ренорм-групповой процедуры заключается в преобразовании  $\mathcal{I}(\varphi, p) \rightarrow \mathcal{I}'(\varphi', p')$ , где

$$\exp[i\mathcal{I}'(\varphi', p')] = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} \mathcal{D}\tilde{p} \exp[i\mathcal{I}(\varphi' + \tilde{\varphi}, p' + \tilde{p})] . \quad (10.33)$$

Как мы установили выше, нормировочная константа не зависит от параметров действия. Поэтому никаких членов, подобных свободной энергии, в динамическом формализме нет.

По аналогии с функционалом Ландау эффективное действие может быть записано следующим образом

$$\mathcal{I}(\varphi' + \tilde{\varphi}, p' + \tilde{p}) = \mathcal{I}(\varphi', p') + \mathcal{I}(\tilde{\varphi}, \tilde{p}) + \mathcal{I}_{int} ,$$

$$\mathcal{I}_{int}^{(2)} = \frac{\lambda}{2} \int dt d^4r [p' \varphi' \tilde{\varphi}^2 + \tilde{p} \tilde{\varphi}(\varphi')^2] , \quad (10.34)$$

$$\mathcal{I}_{int}^{(3)} = \frac{\lambda}{6} \int dt d^4r [p' \tilde{\varphi}^3 + 3\tilde{p} \tilde{\varphi}^2 \varphi'] . \quad (10.35)$$

Также, как и в статике, мы должны стартовать с квадратичного приближения для действия от быстрых переменных (так как разложение

по быстрым переменным есть разложение по малому параметру). В нашем случае квадратичное действие для быстрых переменных получается из (10.12)

$$\tilde{\mathcal{I}}_0 = \int dt d\mathbf{r} \left[ \Gamma \tilde{p} \partial_t \tilde{\varphi} + b \nabla \tilde{p} \nabla \tilde{\varphi} + i \Gamma \Gamma \tilde{p}^2 \right]. \quad (10.36)$$

Как и в статике, нам удобно будет интерпретировать член с коэффициентом  $a$  в (10.12), как поправку, закон ренормировки которой изучается отдельно. Действие (10.36) дает

$$\tilde{G}_0(\omega, q) = -\frac{1}{\Gamma\omega + ibq^2}, \quad \tilde{F}_0(\omega, q) = \frac{2\Gamma\Gamma}{\Gamma^2\omega^2 + b^2q^4}. \quad (10.37)$$

Затем вклады в  $\Delta\mathcal{I} = \mathcal{I}'(\varphi', p') - \mathcal{I}(\varphi', p')$  могут вычисляться по теории возмущений.

Однопетлевые вклады в  $\Delta\mathcal{I}$  могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta_1\mathcal{I} &= \frac{i}{2} \left\langle \left[ \mathcal{I}_{int}^{(2)} \right]^2 \right\rangle_0, \quad \Delta_2\mathcal{I} = i \left\langle \mathcal{I}_{int}^{(2)} \tilde{\mathcal{I}}_a \right\rangle_0, \\ \tilde{\mathcal{I}}_a &= a \int dt d^4r \tilde{p} \tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (10.38)$$

где усреднение производится с весом  $\exp(i\tilde{\mathcal{I}}_0)$ . Для обоих вкладов это среднее сводится к фактору, соответствующему  $F - G$  петле, показанной на рисунке 10.5. Аналитически этот фактор записывается следующим образом

$$\int \frac{d\omega d^4q}{(2\pi)^5} \tilde{G}_0(\omega, q) \tilde{F}_0(\omega, q).$$

Используя соотношение (10.19), аналитические свойства  $G$  и симметрию подынтегрального выражения, мы можем свести интеграл по частоте к вычету в точке  $\omega = 0$ . В результате мы получаем точно такое же выражение, как и однопетлевое выражение в статике. Далее, мы можем найти поправки к  $\lambda$  (из  $\Delta_1\mathcal{I}$ ) и к  $a$  (из  $\Delta_2\mathcal{I}$ ), которые оказываются совпадающими с соответствующими статическими выражениями. Таким образом, для  $\lambda$  и  $a$  мы получаем те же однопетлевые РГ-уравнения, как и в статике. Это утверждение остается справедливым и для многопетлевых вкладов в РГ-уравнения.

В однопетлевом приближении поправки к параметрам  $b$  и  $\Gamma$  отсутствуют. Опять-таки, для  $b$  то же самое свойство было установлено в статике. Чтобы найти ренормировку  $b$  и  $\Gamma$ , мы должны принять во

внимание двухпетлевые вклады, которые определяются следующими поправочными членами в эффективном действии

$$\begin{aligned} \Delta_3 \mathcal{I} = & \frac{i}{2} \left\langle \left[ \mathcal{I}_{int}^{(3)} \right]^2 \right\rangle = \frac{i\lambda^2}{12} \int dt_1 d^4 r_1 \int dt_2 d^4 r_2 \langle \tilde{\varphi}_1^3 \tilde{p}_2 \tilde{\varphi}_2^2 \rangle p'_1 \varphi'_2 \\ & + \frac{i\lambda^2}{72} \int dt_1 d^4 r_1 \int dt_2 d^4 r_2 \langle \tilde{\varphi}_1^3 \tilde{\varphi}_2^3 \rangle p'_1 p'_2. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Первое слагаемое в выражении (10.39) производит поправки к членам  $\Gamma p \partial_t \varphi$  и  $b \nabla p \nabla \varphi$  в эффективном действии, в то время как второе слагаемое производит поправку к члену  $T \Gamma p^2$  в эффективном действии. Извлекая поправку к  $b$  из первого слагаемого в (10.39), можно найти, что она совпадает со статической поправкой. Таким образом, РГ-уравнение для  $b$  совпадает со статическим, как это имеет место и для  $\lambda$  и  $a$ . Далее, можно извлечь из (10.39) поправки к факторам при  $p \partial_t \varphi$  и  $p^2$ . Оказывается, они дают идентичные выражения для ренормировки  $\Gamma$ . Простейшим способом проверить это утверждение является использование соотношения (10.19) (без явного вычисления интегралов). Таким образом, это свойство оказывается связанным с ФДТ. Мы видим, что эффективное действие (10.12) воспроизводится при исключении быстрых переменных, то есть, как говорят, является ренормируемым.

Мы интересуемся в основном законом ренормировки  $\Gamma$ , и потому мы сосредоточимся на втором члене в (10.39). Мы можем подставить в нем  $p'_1$  вместо  $p'_2$ . (Аргументация является стандартной: поле  $p'$  является медленным, а потому мало меняется на масштабах, где “живет” быстрое поле.) В результате мы находим следующее выражение для поправки к  $\Gamma$ :

$$\Delta \Gamma = \frac{\lambda^2}{12T} \int dt d^4 r \tilde{F}_0^3(t, r). \quad (10.40)$$

Функция  $\tilde{F}_0(t, r)$  может быть найдена, как Фурье-преобразование выражения (10.37):

$$\tilde{F}_0(t, r) = \frac{T}{4\pi^2 b r^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\Gamma r^2}{4bt} \right) \right]. \quad (10.41)$$

Конечно, выражение (10.41) справедливо только если  $\Lambda' \ll r^{-1} \ll \Lambda$ . Подставляя (10.41) в (10.40), мы получаем

$$\Delta \Gamma = \frac{\lambda^2 T^2 \Gamma}{3 \cdot 2^8 \pi^4 b^4} \int \frac{dr}{r} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} [1 - \exp(-s)]^3.$$

Интеграл по  $s$  здесь равен  $3 \ln(4/3)$ . Далее, интеграл  $\int dr/r$  дает  $\ln(\Lambda/\Lambda')$ . Таким образом, мы получаем окончательно

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{9} \ln(4/3) g^2 \Gamma \ln(\Lambda/\Lambda'). \quad (10.42)$$

Здесь  $g$  – инвариантный заряд

$$g = \frac{3T\lambda}{16\pi^2 b^2},$$

введенный нами в статике (смотри лекцию 4).

Как обычно, выражение для поправки к тому или иному параметру при элементарном шаге ренорм-групповой процедуры может быть напрямую использовано для формулировки РГ-уравнения для этого параметра. Выражение (10.42) приводит к следующему РГ-уравнению для  $\Gamma$ :

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{1}{9} \ln(4/3) g^2 \Gamma, \quad \xi = \ln(\Lambda/\Lambda'). \quad (10.43)$$

Выше мы привели вычисления для однокомпонентного параметра порядка. Вся схема легко обобщается и на случай  $n$ -компонентного параметра порядка. Тогда мы находим вместо (10.43)

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{3(n+2)}{(n+8)^2} \ln(4/3) g^2 \Gamma, \quad (10.44)$$

а инвариантный заряд определяется теперь выражением (4.32). Это уравнение аналогично уравнению (4.31) для  $b$ .

Перейдем теперь к размерности  $d = 4 - \epsilon$ . В главном порядке по  $\epsilon$  мы можем подставить в выражение (10.44)  $g = \epsilon$ . Тогда мы находим решение  $\Gamma \propto (\Lambda')^{-3(n+2)/(n+8)^2 \ln(4/3) \epsilon^2}$ . Напомним, что в том же приближении  $b \propto (\Lambda')^{-(n+2)\epsilon^2/2(n+8)^2}$ . Подставляя сюда  $\Lambda' = q$  и сравнивая члены  $\Gamma\omega$  и  $bq^2$  (входящие, скажем, в Гринавскую функцию), мы получаем  $\omega \propto q^z$ , где динамический критический индекс равен

$$z = 2 + \frac{(n+2)\epsilon^2}{2(n+8)^2} [6 \ln(4/3) - 1]. \quad (10.45)$$

Это соотношение может быть переписано в следующем виде [51]

$$z = 2 + [6 \ln(4/3) - 1] \eta, \quad (10.46)$$

где  $\eta$  – аномальный индекс парной корреляционной функции в статике, который в том же двухпетлевом приближении определяется выражением (4.41).

## Задачи

### Задача 10.1

Найти скейлинговое поведение корреляционной функции  $\langle\langle \varphi^2(t, \mathbf{0}) \varphi^2(0, \mathbf{0}) \rangle\rangle$  в точке фазового перехода для релаксационной динамики.

### Решение задачи 10.1

Вблизи точки фазового перехода мы можем написать

$$\langle\langle \varphi^2(t, \mathbf{r}) \varphi^2(0, \mathbf{0}) \rangle\rangle = r_c^{\alpha/\nu-d} f(r/r_c, t/r_c^z),$$

где  $d$  – размерность пространства. Устремляя здесь  $r$  к нулю, а  $r_c$  к бесконечности, и требуя, чтобы ответ не зависел от  $r_c$ , мы находим

$$\langle\langle \varphi^2(t, \mathbf{0}) \varphi^2(0, \mathbf{0}) \rangle\rangle \propto t^{-\varpi}, \quad \varpi = \frac{\nu d - \alpha}{\nu z}.$$



## Лекция 11

# Проблема KPZ

Проблема KPZ (Kardar-Parisi-Zhang) [56] связана с такими процессами, как распространение фронта пламени или рост кристалла из пересыщенного раствора. В обоих случаях речь идет о движущейся границе раздела, которую в нулевом приближении можно считать плоской. Предметом рассмотрения являются флуктуации границы раздела, производящие отклонения ее формы от плоской. Отметим, что в обоих случаях мы имеем дело с сильной неравновесностью, и потому, в отличие от равновесного случая, замкнутое рассмотрение одновременных корреляционных функций невозможно. Поэтому при изучении флуктуаций границы раздела надо стартовать с динамического уравнения, которое и является уравнением KPZ. Удивительным образом, то же уравнение возникает в физике высокотемпературных сверхпроводников, описывая распределение квантовых вихрей (возникающих при наличии внешнего магнитного поля) в случайном потенциале [57]. В этом случае роль времени играет координата вдоль направления магнитного поля, которое определяет преимущественную ориентацию вихрей. Таким образом, уравнение KPZ весьма универсально, что связано с его симметричными свойствами, которые обсуждаются ниже.

### 11.1 Флуктуации

Продemonстрируем физическое происхождение уравнения KPZ на примере роста кристалла из пересыщенного раствора. Будем считать, что кристалл растет вдоль оси  $Z$ . Тогда форма его поверхности может быть задана следующим соотношением

$$z = z_0 + Vt + h(t, x, y), \quad (11.1)$$

где  $V$  – средняя скорость роста поверхности, а переменная  $h$  (высота поверхности) описывает флуктуации формы поверхности вблизи плоской. Уравнение KPZ имеет следующий вид

$$\partial_t h = \lambda(\nabla h)^2 + D\nabla^2 h + \zeta. \quad (11.2)$$

Первый член в правой части (11.2) связан с тем, что поверхность кристалла растет со скоростью  $V$  в направлении, перпендикулярном этой поверхности. Ненулевое значение  $\nabla h$  означает наличие наклона поверхности, что приводит к изменению значения скорости в проекции на ось  $Z$ . Этот эффект и описывает первый член в правой части (11.2), причем  $\lambda = V/2$ . Второй член в правой части (11.2) описывает диффузию атомов вдоль поверхности, которая стремится сделать ее плоской. Последний же член в правой части (11.2) представляет собой шум, связанный с флуктуациями потока атомов из раствора на поверхность.

Мы считаем, что шум  $\zeta$  коротко коррелирован как во времени, так и в пространстве. Поэтому эффективно поле  $\zeta$  обладает Гауссовой статистикой, которая полностью определяется парной корреляционной функцией

$$\langle \zeta(t_1, \mathbf{r}_1) \zeta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 2T \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (11.3)$$

Здесь фактор  $T$  определяет силу флуктуаций шума, и потому может быть назван эффективной температурой. Однако во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что мы имеем дело с неравновесной ситуацией, так что для одновременной статистики  $h$  нельзя ввести распределение Гиббса. Вообще говоря, шум коррелирован на атомных масштабах, так что  $\delta$ -функции в (11.3) являются реально “шапочками” с конечной шириной. Скажем,  $\delta(\mathbf{r})$  следует понимать, как  $\delta_\Lambda(\mathbf{r})$ , то есть как шапочку с характерным размером  $\Lambda^{-1}$  (который является атомным размером), нормированную условием

$$\int d^d r \delta_\Lambda(\mathbf{r}) = 1.$$

Нас интересуют процессы, происходящие на размерах гораздо больше атомных, то есть волновой вектор  $\Lambda$  играет роль “ультрафиолетовой” обрезки.

Возвратимся теперь к универсальности проблемы KPZ. Эта универсальность связана с тем, что (11.2) описывает длинноволновый предел динамики произвольного скалярного поля  $h$  при условии, что эта динамика инвариантна относительно сдвига  $h \rightarrow h + \text{const}$ , но не инвариантна относительно замены знака поля  $h \rightarrow -h$ . Именно поэтому уравнение KPZ возникает, как длинноволновый предел, в самых

разных физических ситуациях. Конечно, интерпретация коэффициентов  $\lambda$ ,  $D$  и  $T$ , скажем, для сверхпроводников, совершенно отлична от случая роста поверхности (это энергия вихря на единицу длины, его упругость, и мощность случайного потенциала). Тем не менее, форма уравнения остается той же самой.

Уравнение (11.2) можно изучать для произвольной размерности пространства  $d$ . Наиболее интересной с физической точки зрения является размерность  $d = 2$ , она соответствует как росту кристалла или распространению пламени, так и квантовым вихрям в случайном потенциале. Эта размерность  $d = 2$  также весьма интересна и с чисто теоретической точки зрения, так как именно эта размерность является маргинальной: флуктуационные поправки к корреляционным функциям  $h$  в пространстве размерности  $d = 2$  носят логарифмический характер. Забегая вперед, мы можем сказать, что в проблеме KPZ реализуется случай “асимптотической свободы”, то есть эффективная константа связи растет с ростом масштаба. Мы приведем также некоторые сведения о проблеме KPZ в размерности  $d = 1$ .

Исследуем корреляционные функции поля  $h$

$$\langle h(t_1, \mathbf{r}_1) \dots h(t_n, \mathbf{r}_n) \rangle, \quad (11.4)$$

которые являются средними по статистике шума. Другими словами,  $h$  надо найти, как решение уравнения (11.2) с данным  $\zeta$ , затем вычислить произведение  $h(t_1, \mathbf{r}_1) \dots h(t_n, \mathbf{r}_n)$ , после чего найти среднее по  $\zeta$  в соответствии с (11.3). Мы интересуемся стационарным случаем, когда состояние системы однородно во времени и пространстве, тогда корреляционные функции (11.4) зависят от разностей времен и координат. Мы будем считать  $\langle h \rangle = 0$ . В то же время высшие корреляционные функции  $h$  нечетного порядка не равны нулю из-за квадратичного характера нелинейности в уравнении (11.2).

К сожалению, невозможно решить уравнение (11.2) явно, и потому набросанная нами выше прямая схема вычисления корреляционных функций (11.4) может быть реализована только в рамках теории возмущений. Как мы объяснили в лекции 10, удобно переформулировать задачу, выразив корреляционные функции (11.4) в виде функционального интеграла. Это позволяет стандартным путем сформулировать теорию возмущений, а затем и ренорм-групповую процедуру, но, кроме того, такое представление допускает некоторые важные преобразования переменных, а также, в принципе, позволяет вычислять и непертурбативные эффекты, которые невозможно получить в рамках теории возмущений.

Повторяя шаги, сделанные в лекции 10 (в частности, вводя вспомогательное поле  $p$ ), мы получаем корреляционные функции (11.4) в

виде функционального интеграла по полям  $h$  и  $p$  с весом  $\exp(i\mathcal{I})$ , где эффективное действие  $\mathcal{I}$  строится по уравнению (11.2) с учетом (11.3)

$$\mathcal{I} = \int dt d^d r \left[ p \partial_t h - Dp \nabla^2 h - \lambda p (\nabla h)^2 + iTp^2 \right]. \quad (11.5)$$

Тогда, например, парная корреляционная функция  $h$  записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} F(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \langle h(t_1, \mathbf{r}_1) h(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &= \int \mathcal{D}h \mathcal{D}p \exp(i\mathcal{I}) h(t_1, \mathbf{r}_1) h(t_2, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Аналогичным образом записываются и высшие корреляционные функции  $h$ .

Как мы объяснили в той же лекции 10, полезно включить в рассмотрение корреляционные функции, содержащие вспомогательное поле  $p$ . Скажем, парная корреляционная функция (Гриновская функция)

$$\begin{aligned} G(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \langle h(t_1, \mathbf{r}_1) p(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &= \int \mathcal{D}h \mathcal{D}p \exp(i\mathcal{I}) h(t_1, \mathbf{r}_1) p(t_2, \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (11.7)$$

имеет смысл восприимчивости системы. А именно, если добавить “внешнюю силу”  $f(t, \mathbf{r})$  в правую часть уравнения (11.2), то, как отклик на эту силу, возникнет среднее  $\langle h \rangle$ , которое в линейном приближении определяется Гриновской функцией (11.7)

$$\langle h(t_1, \mathbf{r}_1) \rangle = -i \int dt_2 d^d r_2 G(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f(t_2, \mathbf{r}_2). \quad (11.8)$$

Таким образом, в силу причинности  $G(t, \mathbf{r}) = 0$  при  $t < 0$ . Отметим также, что парная корреляционная функция  $\langle p_1 p_2 \rangle$  равна нулю. Более подробное обсуждение этих свойств можно найти в лекции 10.

Выражение для эффективного действия (11.5) может служить исходной точкой для построения теории возмущений. Перепишем это выражение в виде  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{(2)} + \mathcal{I}^{(3)}$ :

$$\mathcal{I}^{(2)} = \int dt d^d r \left[ p \partial_t h - Dp \nabla^2 h + iTp^2 \right], \quad (11.9)$$

$$\mathcal{I}^{(3)} = -\lambda \int dt d^d r p (\nabla h)^2. \quad (11.10)$$

Выражения для корреляционных функций типа (11.6, 11.7) содержат фактор  $\exp(i\mathcal{I})$ , который можно разложить в ряд по  $\mathcal{I}^{(3)}$ . Каждый

член в этом разложении вычисляется явно, поскольку сводится к Гауссовому интегралу. В результате корреляционные функции представляются в виде ряда по  $\lambda$ .

Затравочные значения корреляционных функций определяются квадратичной частью эффективного действия (11.9), что соответствует линейному исходному уравнению (11.2) (при  $\lambda = 0$ ). Тогда интегралы (11.6, 11.7) являются Гауссовыми и могут быть вычислены явно. Все корреляционные функции  $h$  и  $p$  при  $\lambda = 0$  сводятся к этим затравочным парным корреляционным функциям. Явное выражение для парной корреляционной функции (11.6) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} F_0(t, \mathbf{r}) &= \int \frac{d\omega d^d q}{(2\pi)^{d+1}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{2T}{\omega^2 + D^2 q^4} \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{T}{Dq^2} \exp(-Dq^2|t|), \end{aligned} \quad (11.11)$$

где  $\omega$  – частота и  $\mathbf{q}$  – волновой вектор. Аналогичное выражение справедливо для Гриновской функции (11.7)

$$\begin{aligned} G_0(t, \mathbf{r}) &= - \int \frac{d\omega d^d q}{(2\pi)^{d+1}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{1}{\omega + iDq^2} \\ &= i\theta(t) \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right), \end{aligned} \quad (11.12)$$

где  $\theta(t)$  – ступенька. В соответствии с принципом причинности Гриновская функция  $G(t)$  равна нулю при  $t < 0$ .

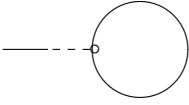
Усредняя уравнение (11.2) по статистике шума, мы находим соотношение

$$(\partial_t - D\nabla^2)\langle h \rangle = \langle \lambda(\nabla h)^2 \rangle. \quad (11.13)$$

Предполагая однородность в пространстве, мы приходим к выводу, что правая часть (11.13) определяет величину дрейфа  $\langle \partial_t h \rangle$ . В нулевом приближении по  $\lambda$  мы находим из (11.11)

$$\langle \lambda(\nabla h)^2 \rangle_0 = \lambda \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{T}{D}.$$

Этот интеграл является ультрафиолетовым (расходится при больших  $q$ ), и не может быть, следовательно, вычислен в рамках макроскопической теории. Поэтому соответствующий вклад в правой части (11.13) следует включить в переопределение средней скорости  $V$  движения поверхности (роста кристалла или распространения пламени), которая введена соотношением (11.1). То же относится и к вкладам более высокого порядка в  $\langle \partial_t h \rangle$ : все они являются ультрафиолетовыми

Рис. 11.1: Вклад в среднее значение  $\partial_t h$ .

и должны быть включены в переопределение  $V$ . Таким образом, и с учетом флуктуационных поправок  $\langle \partial_t h \rangle$  следует считать нулевым.

Рассмотрим ряд теории возмущений для корреляционных функций  $h$  и  $p$ . Как следует из выражения (11.10) для члена взаимодействия в эффективном действии, ряд теории возмущений определяется диаграммами с линиями, которые представляют парную корреляционную функцию (11.11) и Гриновскую функцию (11.12), и вершинами третьего порядка, каждой из которых сопоставляются множитель  $\lambda$ . Как и раньше (смотри лекцию 10), мы будем изображать парную корреляционную функцию сплошной линией, а Гриновскую функцию – комбинацией (сплошной-пунктирной) линией (тогда сплошные линии соответствуют полю  $h$ , а пунктирная линия соответствует полю  $p$ ). Как видно из выражения (11.10), разложение в ряд теории возмущений содержит градиенты поля  $h$ , то есть сплошной линии, входящей в некоторую вершину, следует сопоставлять градиент  $F_0$  или  $G_0$  (в зависимости от типа линии). В качестве примера на рисунке 11.1 приведена диаграмма, которая дает поправку к  $\langle \partial_t h \rangle$ . Она представляет нулевой по  $\lambda$  член разложения соотношения (11.13), которое обсуждалось выше.

Сравнивая член взаимодействия (11.10) со вторым членом в квадратичном действии (11.9), мы приходим к выводу, что теория возмущений строится по параметру  $\lambda h_{ch}/D$ , где  $h_{ch}$  – характерное значение поля  $h$ . Если  $d > 2$ , то среднеквадратичная флуктуация поля  $h$  на масштабе  $r$  может быть оценено с помощью (11.11)

$$h_r^2 \sim F_0(t=0, \mathbf{r}) \sim \frac{T}{D} r^{2-d}. \quad (11.14)$$

Как видно из этого выражения, флуктуации  $h$  максимальны на масштабе  $r \sim \Lambda^{-1}$ , то есть  $h_{ch}^2 \sim T\Lambda^{d-2}/D$ . Поэтому безразмерным параметром, который определяет силу флуктуаций, является  $\lambda^2 h_{ch}^2/D^2 \sim T\lambda^2 \Lambda^{d-2}/D^3$ . Если этот параметр мал, то флуктуации являются слабыми, и поправки к (11.11, 11.12) незначительны на всех масштабах. Если же этот параметр велик, то система находится в режиме сильной связи, и очень трудно сказать о ней что-либо определенное. Перейдем теперь к размерности  $d \leq 2$ . В этом случае при  $t = 0$  интеграл (11.11)

по  $q$  расходится при малых  $q$ , то есть он определяется шкалами порядка размеров системы. В этом случае среднеквадратичную флуктуацию  $h^2$  на масштабе  $r$  может быть оценена через парную корреляционную функцию, где исключены флуктуации поля  $h$  на больших масштабах (порядка размера системы):

$$h_r^2 \sim F_0(t=0, 0) - F_0(t=0, \mathbf{r}) \sim \frac{T}{D} r^{2-d}, \quad (11.15)$$

как следует из (11.11). Мы видим, что при  $d \leq 2$  флуктуации поля  $h$  растут с ростом масштаба  $r$ . Поэтому при достаточно большом размере системы мы обязательно попадаем в режим сильной связи. Тем не менее, если  $T\lambda^2/(D^3\Lambda^{2-d}) \ll 1$ , то существует область масштабов, где флуктуации поля  $h$  слабы. Эта область масштабов определяется неравенством  $\lambda h_r/D \ll 1$ , то есть  $[D^3/(T\lambda^2)]^{1/(2-d)} \gg r \gg \Lambda^{-1}$ . Здесь поправки к (11.11, 11.12) могут вычисляться по теории возмущений. Для больших же масштабов теория возмущений не работает, там корреляционные функции  $h$  сильно ренормируются.

В двумерном случае в выражении (11.15) вместо степени появляется логарифм:  $h_r^2 \sim (T/D) \ln(\Lambda r)$ . Это является проявлением маргинальности размерности  $d = 2$ . Именно этот случай  $d = 2$  мы анализируем далее. В этой размерности условие слабости флуктуаций на малых масштабах имеет вид  $T\lambda^2/D^3 \ll 1$ . Оно будет предполагаться выполненным в дальнейшем. Параметр  $\lambda h_r/D$ , характеризующий силу флуктуаций, остается малым в области масштабов  $\Lambda^{-1} \ll r \ll R_c$ , где  $\ln(R_c\Lambda) \sim \frac{D^3}{T\lambda^2}$ . В терминах квантовой хромодинамики  $R_c$  соответствует длине конфайнмента (невыветания кварков). На масштабах  $r \gtrsim R_c$  выражения (11.11, 11.12) для корреляционных функций (11.6, 11.7) существенно модифицируются. К сожалению, очень трудно сказать что-либо определенное об этой области сильной связи. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать в основном область слабой связи  $\Lambda^{-1} < r < R_c$ .

Первые поправки к Гриновской функции (11.7) и парной корреляционной функции (11.6) определяются диаграммами, приведенными на рисунках 11.2 и 11.3, соответственно. На этих диаграммах имеется петля  $G - F$ , которой (с точностью до коэффициента) соответствует следующее аналитическое выражение (в Фурье-представлении)

$$\int \frac{d\nu d^2k}{(2\pi)^3} (k^2 + \mathbf{qk})(\mathbf{kq}) F_0(\nu, \mathbf{k}) G_0(\nu + \omega, \mathbf{k} + \mathbf{q}),$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{q}$  – частота и волновой вектор Гриновской функции или парной корреляционной функции, к которой вычисляется поправка. Выписанное выражение пропорционально  $q^2 \ln(\Lambda/q)$ , где логарифм происходит

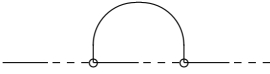


Рис. 11.2: Первая поправка к Гриновской функции.

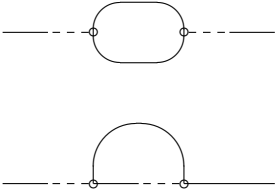


Рис. 11.3: Первые поправки к парной корреляционной функции.

из области интегрирования  $q < k < \Lambda$ . Суммируя затем собственно-энергетический ряд с петлей  $G-F$  в выражении для Гриновской функции  $G$ , мы приходим к выводу, что петля  $G-F$  дает логарифмическую поправку к “коэффициенту диффузии”  $D$ .  $F-F$  петле на рисунке 11.3 соответствует (с точностью до коэффициента) следующее аналитическое выражение (в Фурье-представлении)

$$\int \frac{d\nu d^2k}{(2\pi)^3} (k^2 + \mathbf{q}\mathbf{k})^2 F_0(\nu, \mathbf{k}) F_0(\nu + \omega, \mathbf{k} + \mathbf{q}),$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{q}$  – частота и волновой вектор парной корреляционной функции, к которой вычисляется поправка. Выписанное выражение пропорционально  $\ln(\Lambda/q)$ , который происходит из области интегрирования  $q < k < \Lambda$ . Сравнивая выражение для поправки к  $F$ , обусловленной диаграммой с петлей  $F-F$ , мы находим, что  $F-F$  петля дает логарифмическую поправку к “температуре”  $T$ .

## 11.2 Ренорм-группа

Мы приходим к выводу, что при  $d = 2$  возникают логарифмические поправки к параметрам корреляционных функций. В этой ситуации наиболее удобным способом анализа является ренорм-группа. Ниже мы выводим ренорм-групповые уравнения для параметров эффективного действия (11.5).



Сделаем элементарный шаг ренорм-групповой процедуры. Для этого разделим поля  $h$  и  $p$  на быструю и медленную части:

$$h = h' + \tilde{h}, \quad p = p' + \tilde{p}, \quad (11.16)$$

где быстрые компоненты  $\tilde{h}$  и  $\tilde{p}$  содержат Фурье-гармоники с волновыми векторами от  $\Lambda'$  до  $\Lambda$ . (Как и в лекции 10, мы не вводим ограничений по частотам для быстрых полей.) Затем необходимо проинтегрировать по  $\tilde{h}$  и  $\tilde{p}$  функцию распределения вероятности  $\exp(i\mathcal{I})$  с тем, чтобы получить функцию распределения для медленных полей:

$$\exp(i\mathcal{I}') = \int \mathcal{D}\tilde{h} \mathcal{D}\tilde{p} \exp(i\mathcal{I}). \quad (11.17)$$

Подставляя декомпозицию (11.16) в (11.5), мы получаем

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(h', p') + \mathcal{I}(\tilde{h}, \tilde{p}) + \mathcal{I}_{int}, \quad (11.18)$$

$$\mathcal{I}_{int} = -\lambda \int dt d^2r \left\{ p' (\nabla \tilde{h})^2 + 2\tilde{p} \nabla h' \nabla \tilde{h} \right\}. \quad (11.19)$$

Как обычно, мы опустили в (11.19) линейный по быстрым полям член, поскольку он не производит интересующих нас логарифмов. Далее, раскладывая правую часть соотношения (11.17) по  $\mathcal{I}_{int}$ , мы получаем

$$\mathcal{I}'(h', p') - \mathcal{I}(h', p') = \langle \mathcal{I}_{int} \rangle + \frac{i}{2} \langle \mathcal{I}_{int}^2 \rangle - \frac{1}{6} \langle \mathcal{I}_{int}^3 \rangle + \dots, \quad (11.20)$$

где угловые скобки означают усреднение по быстрым полям, и, как обычно, надо принимать во внимание только связные диаграммы.

В главном приближении среднее в правой части (11.20) можно вычислять по функции распределения  $\exp[i\tilde{\mathcal{I}}^{(2)}]$ , где  $\tilde{\mathcal{I}}^{(2)}$  – член второго порядка в действии для быстрых переменных, смотри (11.9). Это приближение называется обычно однопетлевым. Только члены второго и третьего порядка в соотношении (11.20) содержат логарифмы, и, следовательно, только эти члены следует удерживать при вычислении  $\mathcal{I}'(h', p') - \mathcal{I}(h', p')$ . Подставляя выражение (11.19) в соотношение

(11.20), мы находим следующие вклады в  $\mathcal{I}'(h', p') - \mathcal{I}(h', p')$ :

$$\begin{aligned} \int dt d^2r \Delta \lambda p' (\nabla h')^2 &= -2\lambda^3 \int dt_1 d\mathbf{r}_1 \int dt_2 d^2r_2 \\ &\times \int dt_3 d^2r_3 \left\langle p'_1 (\nabla \tilde{h}_1)^2 \tilde{p}_2 \nabla h'_2 \nabla \tilde{h}_2 \tilde{p}_3 \nabla h'_3 \nabla \tilde{h}_3 \right\rangle, \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} \int dt d^2r \Delta T p'^2 &= \frac{\lambda^2}{2} \int dt_1 d^2r_1 \\ &\times \int dt_2 d^2r_2 \left\langle p'_1 (\nabla \tilde{h}_1)^2 p'_2 (\nabla \tilde{h}_2)^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} \int dt d^2r \Delta D \nabla p' \nabla h' &= 2i\lambda^2 \int dt_1 d^2r_1 \\ &\times \int dt_2 d^2r_2 \left\langle p'_1 (\nabla \tilde{h}_1)^2 \tilde{p}_2 \nabla h'_2 \nabla \tilde{h}_2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Отметим, что отсутствуют поправки к члену  $p\partial_t h$  в эффективном действии (11.5), поскольку  $\mathcal{I}_{int}$ , определяемое (11.19), содержит только градиенты  $h$ . Средние от быстрых переменных в правых частях соотношений (11.21, 11.22, 11.23) можно при помощи теоремы Вика выразить через средние от быстрых переменных, которые при  $\Lambda' < q < \Lambda$  (или  $\Lambda^{-1} < r < \Lambda'^{-1}$ ) определяются выражениями (11.11, 11.12). В медленных полях в выражениях (11.21, 11.22, 11.23) аргументы можно сделать идентичными (скажем, все три положить равными  $t_1, \mathbf{r}_1$ ), поскольку медленное поле слабо меняется на масштабе  $\Lambda'^{-1}$ , характерном для корреляционных функций быстрых полей. После этого интегралы по  $t_2, t_3$  и  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  могут быть вычислены явно (для этого лучше перейти в Фурье-представление и по координатам, и по времени). В результате мы получаем

$$\Delta\lambda = 0, \quad \Delta D = 0, \quad \Delta T = \frac{\lambda^2 T^2}{2\pi D^3} \ln(\Lambda/\Lambda'). \quad (11.24)$$

Разумеется, отсутствие поправок к  $\lambda$  и  $D$  не является случайным. Оно связано с некоторыми симметричными свойствами рассматриваемой проблемы, которые рассматриваются далее.

Обратим внимание на то, что в силу (11.24)  $\Delta T/T$  пропорционально параметру  $T\lambda^2/D^3$ , который мы считаем малой величиной. Поэтому возможен такой выбор  $\Lambda'$ , при котором  $\ln(\Lambda/\Lambda')$  является большой величиной, в то время как относительная поправка к  $T$  мала. Именно такой выбор мы имеем в виду. Исключив переменные с волновыми векторами вплоть до  $\Lambda'$ , мы можем затем повторить процедуру исключения быстрых переменных, сдвигая тем самым текущую обрезку  $\Lambda'$  в сторону малых волновых векторов (в область больших масштабов).

Тем самым мы приходим к многошаговой процедуре исключения быстрых переменных. Если при каждом шаге относительное изменение  $T$  мало, то этот параметр изменяется при этой многошаговой процедуре в соответствии со следующим дифференциальным уравнением

$$\frac{dT}{d\xi} = \frac{\lambda^2 T^2}{2\pi D^3}, \quad \xi = \ln(\Lambda/\Lambda'). \quad (11.25)$$

Параметры же  $\lambda$  и  $D$  в соответствии с (11.24) остаются неизменными.

Из (11.25) следует следующее уравнение

$$\frac{dg}{d\xi} = g^2 \quad (11.26)$$

для параметра

$$g = \frac{\lambda^2 T}{2\pi D^3}, \quad (11.27)$$

который играет роль безразмерной константы взаимодействия. Мы называем величину, подчиняющуюся уравнению (11.26), инвариантным зарядом. Поскольку инвариантный заряд растет с ростом масштаба, мы сталкиваемся с ситуацией “асимптотической свободы” (термин из квантовой хромодинамики, в рамках которой это явление было впервые исследовано). Уравнение (11.26) имеет хорошо известное решение

$$g = \frac{g_0}{1 - g_0 \ln(\Lambda/\Lambda')},$$

где  $g_0$  – значение константы взаимодействия на малых масштабах  $\sim \Lambda^{-1}$ . Мы как раз предположили, что комбинация  $T\lambda^2/D^3$  мала на малых масштабах, то есть  $g_0 \ll 1$ . Тогда, несмотря на рост константы взаимодействия  $g$  с масштабом, она остается малой вплоть до масштаба  $R_c$ , где  $\ln(\Lambda R_c) = g_0^{-1}$ , что дает

$$\ln(R_c \Lambda) = \frac{D^3}{2\pi T \lambda^2}, \quad (11.28)$$

где фигурируют затравочные константы. На шкалах больше, чем  $R_c$ , мы не можем применять РГ-метод, поскольку константа взаимодействия становится уже не малой, это область сильной связи.

Некоторые свойства корреляционных функций  $h$  можно установить, используя свойства симметрии уравнения (11.2). Прежде, чем сформулировать эти свойства, удобно несколько изменить форму уравнения (11.2), перемасштабировав поле  $h$  и время  $t$ . В результате этого преобразования изменяются коэффициенты  $\lambda$  и  $D$ . Нам будет удобно

выбрать следующие значения:  $\lambda = 1/2$  и  $D = 1$ . Тогда уравнение (11.2) переписывается в следующем виде:

$$\partial_t h = \frac{1}{2}(\nabla h)^2 + \nabla^2 h + \zeta. \quad (11.29)$$

Если  $d \neq 2$ , то параметр  $T$  также может быть переопределен, если включить в игру перемасштабирование координат. Тогда единственным параметром теории останется ультрафиолетовая обрезка  $\Lambda$ . Однако далее нам удобнее будет сохранять параметр  $T$ . В размерности  $d = 2$  область слабой связи существует при  $T \ll 1$ .

Уравнение (11.29) инвариантно относительно преобразования

$$h(t, \mathbf{r}) \rightarrow h(t, \mathbf{r} - \mathbf{v}t) - \mathbf{v}\mathbf{r}, \quad \zeta(t, \mathbf{r}) \rightarrow \zeta(t, \mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (11.30)$$

где  $\mathbf{v}$  – произвольный инфинитезимальный параметр. Соотношение (11.3) также инвариантно относительно преобразования (11.30). Таким образом проблема KPZ имеет симметрию, которую можно назвать Галилеевской инвариантностью, так как преобразование (11.30) напоминает преобразование Галилея. На самом деле инвариантность проблемы KPZ относительно преобразования (11.30) связана с исходной вращательной инвариантностью проблемы. Преобразование (11.30) возникает, если произвести поворот системы координат, затрагивающий ось  $Z$ , как следует из (11.1). Инвариантность проблемы относительно преобразования (11.30) показывает, что члены с  $\partial_t h$  и с  $(\nabla h)^2$  в уравнении KPZ должны иметь один и тот же закон преобразования при ренормировке. Это объясняет отсутствие логарифмических поправок к  $\lambda$ , которое мы установили в рамках РГ-процедуры, так как не может возникать логарифмических поправок к члену  $\partial_t h$  в эффективном действии.

## 11.3 Скейлинг

Проблема KPZ обладает интересными свойствами в размерности  $d = 1$ . Главная особенность этого случая заключается в том, что нелинейный член в уравнении (11.29) сохраняет “энергию”

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int dx (\partial_x h)^2. \quad (11.31)$$

Действительно,

$$\int dx \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta h} (\partial_x h)^2 = - \int dx \partial_x^2 h (\partial_x h)^2 = -\frac{1}{3} \int dx \partial_x (\partial_x h)^3 \rightarrow 0. \quad (11.32)$$

Следовательно, стационарным распределением вероятности в данном случае является “распределение Гиббса”

$$\mathcal{P}(h) \propto \exp(-\mathcal{U}/T), \quad (11.33)$$

где  $\mathcal{P}$  – функция распределения вероятности для одновременных функций поля  $h$ . Обоснование этого утверждения можно найти в приложении А.2. Прежде всего, уравнение (11.29) имеет вид (А.56, А.59) с  $\hat{\Xi} = 1$  и  $\bar{g} = (\partial_x h)^2/2$ . Второе из условий (А.60) эквивалентно соотношению (11.32). Что же касается первого соотношения, то мы должны сначала записать  $\delta\bar{g}(x)/\delta h(x_1) = \partial_x h(x)\delta'(x - x_1)$ . Далее здесь надо положить  $x = x_1$ , что дает неопределенность. Поэтому надо вспомнить, что реально  $\delta(x)$  представляет симметричную “шапочку”  $\delta_\lambda(x)$ , для которой  $\delta'_\lambda(0) = 0$ . Таким образом,  $\delta\bar{g}(x)/\delta h(x) = 0$ , что дает первое условие в (А.60). Итак, все условия, ведущие к (11.33), соблюдены.

Распределение (11.33) является Гауссовым, и потому все одновременные функции  $h$  сводятся к парной корреляционной функции

$$F(x_1 - x_2) = \langle h(t, x_1)h(t, x_2) \rangle. \quad (11.34)$$

В соответствии с (11.34) функция  $F(x)$  определяется интегралом

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp(iqx) \frac{T}{q^2}. \quad (11.35)$$

Как и ранее (в размерности  $d < 2$ ), мы сталкиваемся с инфракрасной расходимостью, то есть основной вклад в парную корреляционную функцию  $h$  связан с флуктуациями с масштабом порядка размера системы. Чтобы оценить величину флуктуаций поля  $h$  на данном масштабе  $x$ , надо использовать величину  $\langle (h_1 - h_2)^2 \rangle$ , в которой вычтен вклад длинноволновых флуктуаций. Здесь  $h_1 = h(t, x_1)$ ,  $h_2 = h(t, x_2)$  и  $x = x_1 - x_2$ . Мы находим из (11.35)

$$\langle (h_1 - h_2)^2 \rangle = T|x_1 - x_2|, \quad (11.36)$$

Таким образом, мы установили скейлинговое (степенное) поведение величины  $\langle (h_1 - h_2)^2 \rangle$ . Заметим, что выражение (11.36) соответствует режиму сильной связи, поскольку оно получено в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ , что в размерности  $d < 2$  соответствует именно сильному взаимодействию флуктуаций  $h$ . Это позволяет высказать предположение, что и при  $d > 1$  в режиме сильной связи  $\langle (h_1 - h_2)^2 \rangle \propto |x_1 - x_2|^\mu$ , где  $\mu$  – некоторый показатель, который зависит от размерности пространства. В частности, такое поведение ожидается при  $d = 2$  на масштабах больше  $R_c$ . Это предположение подтверждают данные, полученные в результате численного моделирования уравнения (11.29) на компьютере.

Несмотря на наличие полной информации об одновременных корреляционных функциях  $h$  при  $d = 1$ , о разновременных корреляционных функциях поля  $h$  при  $d = 1$  мало что известно. Это является отражением того факта, что система реально находится в режиме сильной связи, и потому никакие соображения, основанные на теории возмущений, не работают. Одновременные же корреляционные функции  $h$  удалось найти только благодаря специальному свойству (11.32).

## 11.4 Преобразование Коула-Хопфа

Уравнение (11.29) можно преобразовать к линейному, если перейти к переменной

$$\Psi = \exp(h/2). \quad (11.37)$$

Это преобразование известно, как преобразование Коула-Хопфа. В терминах функции  $\Psi$  уравнение (11.29) переписывается следующим образом

$$\partial_t \Psi = \nabla^2 \Psi + (\zeta/2) \Psi. \quad (11.38)$$

Таким образом вместо нелинейного уравнения (11.29) мы приходим к линейному. Однако вместо аддитивного шума в этом уравнении имеется шум мультипликативный. Поэтому преобразование Коула-Хопфа не ведет к автоматическому решению проблемы KPZ. Более того, корреляционные функции  $\Psi$  не обладают никаким простым скейлинговым поведением (которое ожидается для корреляционных функций  $h$ ). Тем не менее, представление (11.37) позволяет получить ряд интересных соотношений, касающихся режима сильной связи, которые рассматриваются далее.

Исходя из (11.38), можно получить эффективное действие для поля  $\Psi$ , которое имеет вид

$$\mathcal{I}_{CH} = \int dt d^d r \left\{ P \partial_t \Psi - P \nabla^2 \Psi + \frac{iT}{4} P^2 \Psi^2 \right\}, \quad (11.39)$$

где  $P$  вспомогательное поле, “сопряженное”  $\Psi$ . Корреляционные функции величины  $\Psi$  могут быть представлены, подобно (11.6), как функциональные интегралы:

$$\langle \Psi_1 \dots \Psi_N \rangle = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}P \exp(i\mathcal{I}_{CH}) \Psi_1 \dots \Psi_N. \quad (11.40)$$

Аналогичным образом записываются и корреляционные функции, включающие вспомогательное поле  $P$ . Отметим, что среднее  $\Psi$  нулю не равно, как это очевидно из представления (11.37). Поэтому, например, теорию возмущений следует строить по отклонению  $\Psi$  от его среднего.

Можно стандартным образом построить ренорм-групповую процедуру для эффективного действия (11.39). Проведем элементарный шаг РГ-процедуры, разделив поля на быструю  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{P}$  и медленную  $\Psi'$ ,  $P'$  части. Тогда действие (11.39) разбивается на сумму

$$\mathcal{I}_{CH}(\Psi', P') + \mathcal{I}_{CH}(\tilde{\Psi}, \tilde{P}) + \mathcal{I}_{int}.$$

Для получения уравнений ренорм-группы в однопетлевом приближении достаточно сохранить члены второго порядка по  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{P}$ :

$$\mathcal{I}_{int} = \frac{iT}{4} \int dt d^d r \left\{ (P')^2 \tilde{\Psi}^2 + \tilde{P}^2 (\Psi')^2 + 4P' \Psi' \tilde{P} \tilde{\Psi} \right\}. \quad (11.41)$$

После интегрирования по быстрым переменным возникает поправка к четверному члену в действии для медленных переменных, которая происходит из среднего по быстрым переменным вида  $\langle [(P')^2 \tilde{\Psi}^2] \cdot [\tilde{P}^2 (\Psi')^2] \rangle$ . Отметим, что среднее  $\langle [P' \Psi' \tilde{P} \tilde{\Psi}] \cdot [P' \Psi' \tilde{P} \tilde{\Psi}] \rangle$  равно нулю в силу причинности. В результате воспроизводится выражение (11.24) для поправки к  $T$  и далее РГ-уравнение (11.26) в  $d = 2$ .

Таким образом, действие (11.39) оказывается ренормируемым, то есть в маргинальной размерности  $d = 2$  воспроизводится с точностью до логарифмических поправок при исключении быстрых переменных. Таким образом член  $P \nabla^2 \Psi$  ренормируется (точнее, остается неизменным), как единое целое. Но член  $\nabla^2 \Psi$  порождает оба вклада, с коэффициентами  $\lambda$  и  $D$  в исходном уравнении (11.2). Поэтому законы ренормировки  $\lambda$  и  $D$  должны быть идентичными. Мы уже доказали, что к  $\lambda$  логарифмических поправок нет. Вследствие этого должны отсутствовать и логарифмические поправки к  $D$ , что находится в соответствии с результатами прямых РГ-вычислений (смотри выше).

Оказывается, используя  $\delta$ -коррелированность во времени шума, можно получить замкнутые уравнения для одновременных корреляционных функций

$$S_N(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \langle \Psi(t, \mathbf{r}_1) \dots \Psi(t, \mathbf{r}_N) \rangle \exp \left[ -\frac{T}{4} N \delta_\Lambda(0) \right]. \quad (11.42)$$

Здесь последний множитель в экспоненте соответствует ультрафиолетовой константе, которую надо включить в переопределение скорости дрейфа. Поэтому в дальнейшем этот множитель игнорируется. Прodelывая процедуру, аналогичную выводу уравнения Фоккера-Планка (смотри приложение А.2), мы находим из (11.38)

$$\partial_t S_N = \sum_{k=1}^N \nabla_k^2 S_N + \frac{T}{2} \sum_{k>j} \delta_\Lambda(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) S_N. \quad (11.43)$$

В частности для  $N = 2$  мы получаем

$$\partial_t S_2(t, \mathbf{r}) = 2\nabla^2 S_2 + \frac{T}{2} \delta_\Lambda(\mathbf{r}) S_2, \quad (11.44)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ .

Уравнения (11.43) имеют вид уравнений Шредингера (в мнимом времени):  $\partial_t S_N = -\hat{H}_N S_N$ , причем гамильтониан  $\hat{H}_N$  соответствует притягивающимся Бозе-частицам с короткодействующим потенциалом. Рассмотрим асимптотическое (на больших временах) поведение корреляционных функций (11.40). Произвольные начальные условия (скажем,  $h = 0$  при  $t = 0$ , то есть  $\Psi = 1$  и  $S_N = 1$  при  $t = 0$ ) можно разложить по собственным функциям  $\Phi_{Nm}$  гамильтониана  $\hat{H}_N$ :

$$\left( E_{Nm} + \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 \right) \Phi_{Nm} = -\frac{T}{2} \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \Phi_{Nm}, \quad (11.45)$$

где  $E_{Nm}$  – собственные значения Гамильтониана  $\hat{H}_N$ . Тогда зависимость  $S_N$  от времени записывается в следующем виде

$$S_N = \sum_m A_m \exp(-E_{Nm} t) \Phi_{Nm},$$

где коэффициенты  $A_m$  определяются разложением начального состояния по  $S_{Nm}$ . Поскольку основное состояние обладает наименьшей энергией, то мы приходим к выводу о выживании только основного состояния  $\hat{H}_N$  на больших временах.

Хорошо известно, что для притягивающихся Бозе-частиц с короткодействующим потенциалом при  $d \leq 2$  имеются связанные состояния для любого количества частиц, в то время как при  $d > 2$  ситуация сложнее. Если взаимодействие частиц слабо, то имеется только непрерывный спектр, в то время как при сильном взаимодействии возникают связанные состояния (критерий, различающий эти два случая, обсуждался выше, он явно включает обрезку  $\Lambda$ ). Если имеется только непрерывный спектр, то основное состояние соответствует его дну, то есть  $E = 0$ . Поэтому асимптотически по времени  $S_N$  выйдет на стационар:  $S_N \propto \Phi_{N0}$ . Это соответствует случаю слабой связи, когда корреляционные функции (11.40) могут вычисляться по теории возмущений, в которой нулевым приближением является  $\Psi = 1$ . Если же имеется связанное  $N$ -частичное состояние, то именно оно будет определять асимптотическое поведение  $S_N$ , причем сохранится зависимость от времени:

$$S_N \propto \exp(-E_{N0} t) \Phi_{N0}. \quad (11.46)$$

Это соответствует случаю сильной связи.



Возвращаясь теперь к выражению (11.37), мы заключаем, что в случае сильной связи должна быть явная зависимость от времени в одновременных корреляционных функциях  $h$ . Спрашивается, откуда берется эта зависимость? Дело в том, что при наличии сильной связи возникают ненулевые средние  $\langle h^n \rangle$ , растущие со временем. Это означает, что со временем накапливаются однородные флуктуации поля  $h$ , что является следствием сильного взаимодействия. Поясним происхождение средних на формальном языке. Для этого надо вернуться к соотношению (11.13). Как мы объяснили ранее, в среднем  $\langle (\nabla h)^2 \rangle$  имеется ультрафиолетовый вклад, который надо включить в переопределение скорости дрейфа поверхности  $V$ . Однако в этом среднем имеется и инфракрасный вклад, который для  $d = 2$  можно оценить, как  $R_c^{-2}$  (напомним, что сейчас мы работаем в системе единиц, где  $D = 1$ ,  $\lambda = 1/2$ ). Разумеется, этот вклад также можно включить в переопределение  $V$ , однако невозможно исключить инфракрасные вклады во всех средних  $\langle h^n \rangle$ . Эти средние и конвертируются в зависимость от времени корреляционных функций (11.42). Заметим, что наличие однородных средних не влияет на разность  $h(t, \mathbf{r}_1) - h(t, \mathbf{r}_2)$ , так что распределение вероятности этой величины остается стационарным.

Исходя из приведенных выше качественных соображений следует ожидать  $|E_{N0}| \sim R_c^{-2}$  при  $d = 2$ . Проверим это ожидание, найдя в  $d = 2$  энергию основного состояния для  $N = 2$ . Для этого случая собственная функция  $\Phi$  основного состояния зависит только от разности координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , уравнение (11.45) приобретает следующий вид

$$(E + 2\nabla^2) \Phi = -\frac{T}{2} \delta_\Lambda(\mathbf{r}) \Phi, \quad (11.47)$$

где мы ввели значок  $\Lambda$  у  $\delta$ -функции, чтобы напомнить о том, что реально это - "шапочка", размазанная на масштабе  $\Lambda^{-1}$ . Уравнение (11.47) может быть решено при условии  $T \ll 1$  (что при  $d = 2$  является условием существования интервала масштабов, где связь является слабой). Его решение имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = K_0 \left( \sqrt{\frac{|E|}{2}} r \right), \quad (11.48)$$

$$\frac{8\pi}{T} = \ln \frac{\Lambda}{\sqrt{|E|}}. \quad (11.49)$$

Выражение (11.48) справедливо при  $\Lambda r \gg 1$ . При  $D = 1$ ,  $\lambda = 1/2$  соотношение (11.28) приобретает вид  $\ln(R_c \Lambda) = 8\pi/T$ . Таким образом, как и ожидалось,  $|E| \sim R_c^{-2}$ .

В соответствии с (11.48) корреляционная функция  $\Psi$  обладает логарифмическим поведением при  $R_c > r > \Lambda^{-1}$  и экспоненциально спа-

дает на больших масштабах  $r > R_c$ . Такого же типа поведение ожидается и для “многочастичных” связанных состояний  $\Phi_{N0}$ , которые определяют поведение корреляционных функций  $S_N$  (11.42). Отметим также, что для того, чтобы восстановить одновременные корреляционные функции  $h$ , необходимо явно знать весь набор  $S_N$ , то есть все связанные состояния  $\Phi_{N0}$ .

## Задачи

### Задача 11.1

Найти  $E_{N0}$  в размерности  $d = 1$ .

#### Решение задачи 11.1

Как мы уже установили,  $h(t, x_1) - h(t, x_2)$  обладает Гауссовой статистикой, не зависящей от времени. Величины же  $\langle h^n \rangle$  определяются однородными по пространству флуктуациями  $h$ . Взаимной корреляции между  $h(t, x_1) - h(t, x_2)$  и однородными флуктуациями  $h$  нет, поскольку в противном случае зависимость от  $x$  в корреляционных функциях (11.42) не отделялась бы, как это должно быть в соответствии с (11.46). В результате мы находим

$$S_N = \langle \exp(Nh/2) \rangle \exp \left[ -\frac{T}{4} \sum_{i < j} |x_i - x_j| \right], \quad (11.50)$$

где мы использовали (11.36) и Гауссовость статистики разностей. Легко проверить, что выражение (11.50) является решением уравнения (11.45), то есть на больших временах

$$\langle \exp(Nh/2) \rangle = \exp(-E_{N0}t), \quad (11.51)$$

в соответствии с (11.46) (мы сдвинули время так, чтобы обратить в единицу коэффициент пропорциональности). Чтобы найти  $E_{N0}$ , проще всего рассмотреть случай, когда  $x_i$  упорядочены:  $x_1 > x_2 > \dots > x_N$ . Тогда

$$S_N \propto \exp \left[ -\frac{T}{4} \sum_{k=1}^N (N+1-2k)x_k \right].$$

Теперь мы находим в соответствии с (11.45)

$$E_{N0}S_N = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} S_N = -\frac{T^2}{48} N(N^2-1)S_N.$$

**Задача 11.2**

Динамика трехкомпонентного поля  $\varphi$  в размерности  $1 + 2$  описывается следующим стохастическим уравнением

$$\partial_t \varphi_i = \lambda \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{ikn} \nabla_\alpha \varphi_k \nabla_\beta \varphi_n + D \nabla^2 \varphi_i + \zeta_i,$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\epsilon_{ikn}$  являются  $2d$  и  $3d$  антисимметричными тензорами, а  $\zeta$  – случайная сила, которая является белым шумом:

$$\langle \zeta_i(t_1, \mathbf{r}_1) \zeta_j(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 2T \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Найти ренорм-групповые уравнения для параметров  $\lambda$ ,  $D$  и  $T$ . Выразить ответ через инвариантный заряд.

**Решение задачи 11.2**

Эффективное действие для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\mathcal{I} = \int dt d^2r \left\{ p_i \partial_t \varphi_i - p_i \lambda \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{ikn} \nabla_\alpha \varphi_k \nabla_\beta \varphi_n + D \nabla_j p_i \nabla_j \varphi_i + iT p^2 \right\}.$$

Прежде всего заметим, что

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = 0, \quad \frac{dT}{d\xi} = 0.$$

Это является следствием того, что, интегрируя по частям в члене с  $\lambda$  в действии  $\mathcal{I}$  градиент можно перебросить на любое поле. Поэтому производимые при исключении быстрых переменных членом взаимодействия с  $\lambda$  поправки к действию всегда содержат производные от медленных полей. Уравнение на  $D$  получается прямым вычислением

$$\frac{dD}{d\xi} = -\frac{\lambda^2 T}{\pi D^2} = -\frac{1}{3} g D, \quad g = \frac{3\lambda^2 T}{\pi D^2}.$$

Здесь  $g$  – инвариантный заряд:

$$\frac{dg}{d \ln(\Lambda/\Lambda')} = g^2, \quad g = \frac{g_0}{1 - g_0 \ln(\Lambda/\Lambda')}.$$

Таким образом, мы опять имеем дело с асимптотической свободой.

## Лекция 12

# Двумерная гидродинамика

В настоящей лекции мы изучаем роль тепловых флуктуаций в двумерной гидродинамике, то есть мы считаем, что система находится в тепловом равновесии и интересуемся вкладом флуктуаций в законы дисперсии собственных мод системы. Мы рассматриваем два различных класса объектов. Во-первых, это тонкие пленки жидкости на твердой подложке, которые можно считать двумерными на достаточно больших масштабах. Такие пленки в силу их взаимодействия с подложкой не являются замкнутыми системами. Тем не менее, мы можем описывать их в рамках двумерной гидродинамики, если трение о подложку является пренебрежимо малым. Хотя такой случай чрезвычайно трудно реализовать экспериментально, задача представляет несомненный методический интерес. Впервые эта задача была рассмотрена в работе [58]. Взаимодействие с подложкой отсутствует для свободно подвешенных пленок. Они являются вторым классом объектов, которые мы рассматриваем. Свободно подвешенные пленки также не могут быть описаны в рамках собственно двумерной гидродинамики, поскольку они обладают изгибной степенью свободы, наличие которой существенно изменяет ситуацию по сравнению с чисто двумерной гидродинамикой. Поэтому случай свободно подвешенных пленок требует особого рассмотрения.

## 12.1 Уравнение Навье-Стокса

Мы начинаем с несжимаемой двумерной гидродинамики, которая описывается уравнением Навье-Стокса

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla P / \rho + \boldsymbol{\zeta}. \quad (12.1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $P$  – давление,  $\rho$  – двумерная плотность массы (которая считается однородной), и  $\boldsymbol{\zeta}$  – Ланжевеновские силы (тепловой шум). Уравнение Навье-Стокса (12.1) должно быть дополнено условием несжимаемости

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (12.2)$$

Ланжевеновские силы характеризуются следующей корреляционной функцией

$$\langle \zeta_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) \zeta_\beta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = \frac{T\nu}{\rho} \delta(t_1 - t_2) \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} (q^2 \delta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (12.3)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , а  $T$  – температура. Заметим, что в несжимаемом случае давление  $P$  не является независимой динамической переменной. Оно определяется уравнением (12.1) и условием несжимаемости (12.2), которые ведут к соотношению

$$\rho \nabla [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla^2 P, \quad (12.4)$$

связывающему давление  $P$  со скоростью  $\mathbf{v}$ , через которую давление выражается нелокальным и нелинейным образом.

Повторяя процедуру, описанную в лекции 10, мы можем свести проблему вычисления (разновременных) корреляционных функций флуктуирующих величин к функциональным интегралам с весом  $\exp(i\mathcal{I})$  где  $\mathcal{I}$  – эффективное действие, построенное по уравнению (12.1):

$$\mathcal{I} = \int dt d^2 r \left[ p_\alpha \partial_t v_\alpha + p_\alpha v_\beta \partial_\beta v_\alpha + \nu \partial_\alpha p_\beta \partial_\alpha v_\beta + i \frac{T}{\nu \rho} (\partial_\alpha p_\beta)^2 \right]. \quad (12.5)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  – вспомогательное поле, удовлетворяющее условию,  $\nabla \mathbf{p} = 0$ , аналогичному условию несжимаемости  $\nabla \mathbf{v} = 0$  (условие  $\nabla \mathbf{p} = 0$  мотивируется тем, что поле  $\mathbf{p}$  должно содержать столько же степеней свободы, сколько и  $\mathbf{v}$ ). Благодаря условию  $\nabla \mathbf{p} = 0$  член с давлением в уравнении Навье-Стокса (12.1) выпадает из эффективного действия (12.5). Последний член в эффективном действии (12.5) появляется после усреднения по статистике Ланжевеновских сил в соответствии с корреляционной функцией (12.3).

Например, парная корреляционная функция скорости записывается, как следующий функциональный интеграл

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \langle v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) v_\beta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &= \int \mathcal{D}v \mathcal{D}p \exp(i\mathcal{I}) v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) v_\beta(t_2, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Полезно ввести также “смешанные” корреляционные функции (куда входит поле  $p$ ), скажем, парную корреляционную функцию

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &= \langle v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) p_\beta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &= \int \mathcal{D}v \mathcal{D}p \exp(i\mathcal{I}) v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) p_\beta(t_2, \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (12.7)$$

которую мы будем именовать функцией Грина. Функция Грина определяет восприимчивость системы. Действительно, предположим, что к системе приложена внешняя распределенная сила. Тогда ее плотность  $f_\alpha$  должна быть добавлена в правую часть уравнения (12.1):

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla P / \rho + \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{f} / \rho, \quad (12.8)$$

где предполагается также условие  $\nabla \mathbf{f} = 0$ . Под воздействием внешней силы в системе возникает средняя скорость  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , которая в линейном приближении выражается следующим образом

$$\langle v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) \rangle = -\frac{i}{\rho} \int dt_2 d^2 r_2 G_{\alpha\beta}(t_1 - t_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f_\beta(t_2, \mathbf{r}_2). \quad (12.9)$$

Чтобы получить соотношение (12.9) необходимо включить член с силой  $\mathbf{f}$  в эффективное действие (12.5), использовать выражение типа (12.6, 12.7) для средней скорости  $\langle v_\alpha \rangle$  и разложить  $\exp(i\mathcal{I})$  до первого порядка по  $\mathbf{f}$ . Заметим, что из (12.9) в силу причинности следует, что  $G(t)$  должно равняться нулю при  $t < 0$ . Функции  $F$  и  $G$  исчерпывают набор парных корреляционных функций, поскольку корреляционная функция  $\langle p_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) p_\beta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$  равна нулю (доказательство этого факта можно найти в лекции 10).

Теперь мы приступаем к рассмотрению флуктуационных эффектов в двумерной гидродинамике. Прежде всего, мы заключаем, что взаимодействие флуктуаций скорости, которое определяется нелинейным членом в уравнении Навье-Стокса, описывается членом третьего порядка  $\mathcal{I}^{(3)}$  в эффективном действии (12.5). Можно построить теорию возмущений, которая получается разложением функциональных интегралов по  $\mathcal{I}^{(3)}$ . Различные члены этого взаимодействия представляются диаграммами, на которых фигурируют вершины третьего по-

рядка. Линиям на этих диаграммах соответствуют затравочные корреляционные функции (12.6, 12.7), а вершинные функции определяются структурой  $\mathcal{I}^{(3)}$ . Первые поправки к корреляционным функциям (12.6, 12.7) определяются диаграммами, приведенными на рисунках 11.7, 11.48. Напомним, что сплошные линии на этих диаграммах соответствуют корреляционной функции (12.6), а комбинированные линии соответствуют Гриновской функции (12.7) (причем ее пунктирная часть соответствует полю  $\mathbf{p}$ ).

Анализ первых (однопетлевых) вкладов теории возмущений в  $F$  и  $G$  показывает, что их можно интерпретировать, как логарифмические поправки к кинематической вязкости  $\nu$ . То же справедливо и для ряда высших вкладов теории возмущений. Таким образом, мы оказываемся в ситуации, которую наиболее естественно анализировать в рамках ренорм-групповой (РГ) процедуры. Поэтому далее мы анализируем элементарный шаг РГ-процедуры, который заключается в выделении “быстрых” частей полей с последующим интегрированием по ним функции распределения вероятности  $\exp(i\mathcal{I})$ , в результате чего получается функция распределения вероятности для “медленных” полей.

Разделим поля  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$  на быструю и медленную части, обозначая их тильдой и штрихом, соответственно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \tilde{\mathbf{p}}. \quad (12.10)$$

Здесь поля  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\tilde{\mathbf{p}}$  содержат Фурье-гармоники с волновыми векторами  $q$ , лежащими в интервале  $\Lambda' < q < \Lambda$ , где  $\Lambda$  – ультрафиолетовая обрезка. В дальнейшем мы считаем логарифм  $\ln(\Lambda/\Lambda')$  большой величиной и производим отбор по этому параметру.

Подставляя (12.10) в эффективное действие (12.5), мы находим

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathbf{v}', \mathbf{p}') + \mathcal{I}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{p}}) + \mathcal{I}_{int}, \quad (12.11)$$

$$\mathcal{I}_{int} = \int dt d^2r \{ -\partial_\beta p'_\alpha \tilde{v}_\beta \tilde{v}_\alpha + \tilde{p}_\alpha v'_\beta \partial_\beta \tilde{v}_\alpha + \tilde{p}_\alpha \tilde{v}_\beta \partial_\beta v'_\alpha \}. \quad (12.12)$$

Далее, мы вводим эффективное действие  $\mathcal{I}'$  для медленных полей:

$$\exp(i\mathcal{I}') = \int \mathcal{D}\tilde{\mathbf{v}} \mathcal{D}\tilde{\mathbf{p}} \exp(i\mathcal{I}). \quad (12.13)$$

Можно найти выражение для поправки к этому действию, которое возникает при интегрировании по быстрым переменным:

$$\mathcal{I}'(\mathbf{v}', \mathbf{p}') - \mathcal{I}(\mathbf{v}', \mathbf{p}') = \langle \mathcal{I}_{int} \rangle + \frac{i}{2} \langle \mathcal{I}_{int}^2 \rangle - \frac{1}{6} \langle \mathcal{I}_{int}^3 \rangle + \dots \quad (12.14)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по “быстрым” флуктуациям, которое эквивалентно функциональному интегрированию по  $\tilde{v}$  и  $\tilde{p}$  с весом  $\exp[i\mathcal{I}(\tilde{v}, \tilde{p})]$ , а двойные угловые скобки означают неприводимые средние.

Мы исследуем поправки в однопетлевом приближении. Тогда нужно удержать только члены второго порядка в “быстром” эффективном действии  $\mathcal{I}(\tilde{v}, \tilde{p})$ , после чего усреднение в (12.14) сводится к Гауссовым интегралам, которые вычисляются явно. Эти интегралы сводятся к средним

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = - \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \frac{1}{\omega + i\nu q^2}, \quad (12.15)$$

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \frac{2T\nu q^2}{\rho(\omega^2 + \nu^2 q^4)}. \quad (12.16)$$

Первый член в правой части (12.14) равен нулю, а второй и третий члены содержат логарифмические факторы (именно эти члены интересны для нас), а более высокие члены разложения могут быть опущены, как несущественные.

Сначала мы рассмотрим следующую поправку

$$\Delta_1 \mathcal{I}(\mathbf{v}', \mathbf{p}') = \frac{i}{2} \int dt_1 d^2r_1 dt_2 d^2r_2 \langle\langle p'_{1\alpha} \tilde{v}_{1\beta} \partial_\beta \tilde{v}_{1\alpha} p'_{2\mu} \tilde{v}_{2\nu} \partial_\nu \tilde{v}_{2\mu} \rangle\rangle, \quad (12.17)$$

происходящую из второго члена в правой части (12.14). Она может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \mathcal{I} &= \frac{i}{2} \int dt_1 d^2r_1 dt_2 d^2r_2 \partial_\beta p'_{1\alpha} \partial_\nu p'_{2\mu} \\ &\times \left[ \tilde{F}_{\alpha\mu}(t, \mathbf{r}) \tilde{F}_{\beta\nu}(t, \mathbf{r}) + \tilde{F}_{\alpha\nu}(t, \mathbf{r}) \tilde{F}_{\beta\mu}(t, \mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (12.18)$$

где  $t = t_1 - t_2$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Так как  $\tilde{F}$  быстро убывает при росте  $r$  в области  $r > \Lambda'^{-1}$ , а  $p'$  является медленным полем (слабо меняющимся на длине  $\Lambda'^{-1}$ ), в соотношении (12.18) можно (с необходимой нам точностью) заменить  $p'_2$  на  $p'_1$ . Тогда отделяется следующий фактор

$$\begin{aligned} &\int dt d^2r \left[ \tilde{F}_{\alpha\mu}(t, \mathbf{r}) \tilde{F}_{\beta\nu}(t, \mathbf{r}) + \tilde{F}_{\alpha\nu}(t, \mathbf{r}) \tilde{F}_{\beta\mu}(t, \mathbf{r}) \right] \\ &= \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^3} \frac{4T^2\nu^2 q^4}{\rho^2(\omega^2 + \nu^2 q^4)^2} \left\{ \left( \delta_{\alpha\mu} - \frac{q_\alpha q_\mu}{q^2} \right) \left( \delta_{\beta\nu} - \frac{q_\beta q_\nu}{q^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \delta_{\alpha\nu} - \frac{q_\alpha q_\nu}{q^2} \right) \left( \delta_{\beta\mu} - \frac{q_\beta q_\mu}{q^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$



где мы подставили выражение (12.16). Последний интеграл равен

$$\frac{T^2}{8\pi\rho^2\nu} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) .$$

Подставляя это выражение в (12.18), мы получаем

$$\Delta_1 \mathcal{I} = \frac{iT^2}{16\pi\rho^2\nu} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int dt_1 d^2r_1 \partial_\beta p'_{1\alpha} \partial_\beta p'_{2\alpha} , \quad (12.19)$$

где принято во внимание условие  $\nabla \mathbf{p} = 0$ .

Теперь мы обсудим другие поправки, производимые членом  $\langle\langle \mathcal{I}_{int}^2 \rangle\rangle$  в соотношении (12.14). Прежде всего, он не производит членов, квадратичных по  $\mathbf{v}'$ . Формальная причина этого заключается в том, что такие поправки пропорциональны произведению Гриновских функций  $\tilde{G}(t_1 - t_2)\tilde{G}(t_2 - t_1)$ , которое равно нулю, так как один из временных аргументов Гриновских функций здесь отрицателен, а Гриновская функция  $G(t)$  равна нулю при отрицательном  $t$  в силу причинности. Тот факт, что в действии не возникают члены, квадратичные по  $\mathbf{v}'$ , можно было предвидеть заранее, поскольку такие члены нарушили бы фундаментальное свойство  $\langle pp \rangle = 0$ . Следовательно, только следующая поправка

$$\begin{aligned} \Delta_2 \mathcal{I} = & -i \int dt_1 d^2r_1 dt_2 d^2r_2 \\ & \times \langle\langle \partial_\beta p'_{1\alpha} \tilde{v}_{1\beta} \tilde{v}_{1\alpha} (\tilde{p}_{2\mu} v'_{2\nu} \partial_\nu \tilde{v}_{2\mu} + \tilde{p}_{2\mu} \tilde{v}_{2\nu} \partial_\nu v'_{2\mu}) \rangle\rangle , \end{aligned} \quad (12.20)$$

должна быть дополнительно принята во внимание. Прямые вычисления, основанные на разложении медленного поля  $v'_{2\nu}$  до первого порядка по разности  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  (которая имеет характерное значение  $\Lambda'^{-1}$ ), дают

$$\Delta_2 \mathcal{I} = \frac{T}{16\pi\rho\nu} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \int dt_1 d^2r_1 \partial_\beta p'_{1\alpha} \partial_\beta v'_{1\alpha} . \quad (12.21)$$

Заметим, что поправка к члену  $\mathbf{p}' \partial_t \mathbf{v}'$  не может возникнуть из  $\Delta_2 \mathcal{I}$ , поскольку выражение в правой части (12.20) содержит производную  $\partial_\beta p'_{1\alpha}$ .

Далее, необходимо исследовать поправку к медленному действию, которая производится членом  $\langle\langle \mathcal{I}_{int}^3 \rangle\rangle$  в соотношении (12.14). Эта поправка могла бы ренормировать член третьего порядка в эффективном действии (12.5). Однако, прямые вычисления показывают, что среднее  $\langle\langle \mathcal{I}_{int}^3 \rangle\rangle$  не производит логарифмических членов. Причина этого явления заключается в Галилеевской инвариантности исходного уравнения, которая приводит к выводу, что только “полная производная”

$\partial_t + v_\alpha \partial_\alpha$  может входить в эффективное действие. Поскольку отсутствуют поправки к члену с  $\mathbf{p} \partial_t \mathbf{v}$  в эффективном действии (12.5), то должны отсутствовать и поправки к члену третьего порядка в (12.5).

Сравнивая поправки (12.19, 12.21) с исходным выражением (12.5), мы заключаем, что они сводятся к возникновению поправки к коэффициенту вязкости

$$\Delta\nu = \frac{T}{16\pi\rho\nu} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}. \quad (12.22)$$

Совпадение поправок к вязкости в разных членах эффективного действия является следствием флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ), которая должна воспроизводиться при исключении быстрых переменных.

Мы можем рассматривать проделанное выше исключение быстрых переменных, как элементарный шаг многоступенчатой процедуры, при каждом шаге которой параметры эффективного действия изменяются лишь незначительно. Тогда мы можем перейти от разностного соотношения (12.22) к дифференциальному уравнению, которое описывает изменение параметров действия при увеличении логарифма  $\xi = \ln(\Lambda/\Lambda')$ . Это уравнение  $d\nu/d\xi = T/(16\pi\rho\nu)$  приводится к следующему виду

$$\frac{dg}{d\xi} = -g^2, \quad g = \frac{T}{8\pi\rho\nu^2}. \quad (12.23)$$

Величина  $g$  имеет смысл безразмерной константы взаимодействия (инвариантного заряда). Для законности проделанной процедуры инвариантный заряд должен быть мал:  $g \ll 1$ .

Для того, чтобы найти значение  $\nu$  на данном масштабе  $r$ , можно проинтегрировать по всем Фурье-гармоникам  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$  с волновыми векторами  $r^{-1} < q < \Lambda$ . После этого получится эффективное действие, в котором взаимодействие флуктуаций уже несущественно в силу условия  $g \ll 1$ . Другими словами, чтобы найти  $\nu$  на данном масштабе  $r$ , необходимо решить уравнение (12.23) и взять его решение при  $\xi = \ln(\Lambda r)$ .

Из уравнения (12.23) следует, что инвариантный заряд уменьшается с ростом масштаба (с ростом  $\xi$ ). Таким образом, мы имеем дело с “нуль-зарядной” ситуацией. Вязкость же  $\nu$  растет с увеличением масштаба. Решение уравнения (12.23) имеет вид  $g = g_0(1 + g_0\xi)^{-1}$ , где  $g_0$  – коротко-волновое значение инвариантного заряда. Таким образом, на больших масштабах  $g \rightarrow \xi^{-1}$ . Это значит, что кинематическая вязкость выходит на больших масштабах на универсальное поведение

$$\nu \rightarrow \sqrt{\frac{T\xi}{8\pi\rho}}. \quad (12.24)$$

Отметим, что крупномасштабное значение коэффициента вязкости  $\nu$  оказывается независимым от своего затравочного (коротко-волнового) значения.

Выше мы изучили эффекты, связанные с вихревой (соленоидальной) модой. Рассмотрение может быть расширено и на случай полной двумерной гидродинамики, когда учитываются все степени свободы, связанные со скоростью, плотностью массы и удельной энтропией. На языке собственных мод системы это означает, что в рассмотрение включаются также звуковая и термодиффузионная моды. Ответ получается таким же, как и для рассмотренного случая несжимаемой гидродинамики. А именно, все кинетические коэффициенты системы (оба коэффициента вязкости и коэффициент термодиффузии) логарифмически ренормируются и в длинноволновом пределе выходят на универсальное (не зависящее от затравочных значений) поведение, которое характеризуется законом  $\propto \sqrt{\xi}$ . Более того, приведенное рассмотрение может быть обобщено на широкий класс двумерных систем различной симметрии (кристалла, сверхтекучей жидкости, гексатика, нематика, и так далее). Результат оказывается тем же, то есть кинетические коэффициенты системы в длинноволновом пределе выходят на универсальное поведение  $\propto \sqrt{\xi}$ .

## 12.2 Свободно подвешенные пленки

Теперь мы рассмотрим динамические свойства свободно подвешенных тонких пленок [59]. Экспериментально такие пленки могут быть получены вытягиванием из смектической фазы. По существу они представляют собой несколько смектических слоев. Это число может быть небольшим, то есть толщина такой пленки составляет несколько молекулярных длин. На масштабах, больших, чем толщина пленки, она может считаться двумерным объектом. Обычно такие пленки подвешиваются на рамке в воздухе или в вакууме. Поэтому смектическая пленка, как и мембрана (смотри лекцию 8), обладает изгибной степенью свободы. Таким образом, свободно подвешенная смектическая пленка является, как и мембрана, двумерным объектом, вложенным в трехмерное пространство. В то же время, коэффициент поверхностного натяжения смектической пленки отличен от нуля, так как ее площадь фиксирована рамкой. Поэтому такая пленка имеет свои отличительные особенности, которые мы и изучим.

Мы будем иметь в виду ситуацию, когда пленка свободно подвешена в вакууме, и потому отсутствует ее взаимодействие с окружающей средой. В некоторой области масштабов это справедливо и для пленок, подвешенных в воздухе, в силу малой плотности последнего по срав-

нению с плотностью смектика. В этом случае пленку можно считать замкнутой системой. Нас будет интересовать макроскопическая динамика пленки, которая описывается в терминах гидродинамических переменных. Для пленки таковыми являются двумерная плотность массы, смещение пленки, ее трехмерная скорость и удельная плотность энтропии. Уравнение для последней отделяется, поэтому мы не будем рассматривать эту степень свободы.

Мы будем считать, что в равновесии пленка натянута вдоль плоскости  $X - Y$ . Все величины, описывающие состояние пленки, когда она не слишком сильно отклоняется от равновесия, могут быть описаны в рамках переменных, зависящих от координат  $x$  и  $y$ . В соответствии со сказанным выше, мы вводим плотность пленки  $\rho$  в проекции на плоскость  $X - Y$ , смещение пленки  $u$  вдоль оси  $Z$ , и трехмерную скорость пленки  $\mathbf{v}$ . Обратим внимание на то, что “истинная” двумерная плотность пленки  $\bar{\rho}$  (то есть плотность массы на единицу поверхности пленки) равна  $\bar{\rho} = \rho / \sqrt{1 + (\nabla u)^2}$  (сравни с мембранами, лекция 8), поскольку множителем  $\sqrt{1 + (\nabla u)^2}$  отличается площадь элемента пленки и площадь проекции этого элемента на плоскость  $X - Y$ . Именно от этой “истинной” плотности  $\bar{\rho}$  зависит, например, поверхностное натяжение пленки  $\sigma$ .

Динамические уравнения для введенных нами величин имеют следующий вид

$$\partial_t u = v_z - v_\alpha \partial_\alpha u, \quad (12.25)$$

$$\partial_t \rho = -\partial_\alpha (\rho v_\alpha), \quad (12.26)$$

$$\partial_t (\rho v_z) = -\partial_\alpha (\rho v_\alpha v_z) + \partial_\alpha \left[ \sigma \partial_\alpha u / \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \right], \quad (12.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho v_\alpha) = & -\partial_\beta (\rho v_\alpha v_\beta) \\ & + \partial_\beta \left\{ \sigma \left[ \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \delta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha u \partial_\beta u / \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12.28)$$

где греческий индекс пробегает значения  $x, y$ . Уравнение (12.25) означает просто, что пленка движется в  $3d$  пространстве со скоростью  $\mathbf{v}$ . Уравнение (12.26) является законом сохранения массы, а уравнения (12.27, 12.28) в совокупности составляют закон сохранения импульса. В правой части этих уравнений стоит тензор напряжений, состоящий, как обычно, из кинетической и потенциальной частей. Зависимость от  $\partial_\alpha u$  в правой части уравнений (12.27, 12.28) возникает при проектировании тензора напряжений, “привязанного” к пленке, на оси  $X, Y, Z$ , относительно которых пленка повернута на угол, определяемый как раз  $\partial_\alpha u$ .

Уравнения (12.25, 12.26) являются точными, а в уравнениях для плотности импульса (12.27, 12.28) опущены диссипативные (вязкие) чле-

ны. В уравнении (12.27) такой член, пропорциональный  $\nabla^2 v_z$  (при малых  $u$ ), вообще отсутствует. Причина этого заключается в следующем. Если бы такой член присутствовал в правой части (12.27), то он приводил бы к диссипации энергии, пропорциональной  $(\nabla v_z)^2$ . Представим теперь себе, что пленка, как целое, вращается вокруг оси  $Y$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Тогда  $v_z = \Omega x$  и  $(\nabla v_z)^2 = \Omega^2$ , то есть при наличии вязкого члена в уравнении (12.27) однородное вращение пленки приводило бы к диссипации энергии, чего быть не может. Полученное противоречие и доказывает отсутствие вязкого члена в уравнении (12.27). Главный диссипативный член в этом уравнении пропорционален  $\nabla^4 v_z$  (такое явление иногда называют гипервязкостью). В уравнении же (12.28) имеется обычный вязкий член, пропорциональный (при малых  $u$ )  $\nabla^2 v_\alpha$ . Однако на больших масштабах диссипация, обусловленная флуктуационным механизмом, оказывается гораздо сильнее. Именно этот эффект мы и изучаем далее.

Линеаризуя уравнения (12.25-12.28) по  $u$ ,  $v_z$ ,  $v_\alpha$  и отклонениям плотности  $\delta\rho$  от равновесной плотности  $\rho_0$ , и находя собственные моды получившейся системы уравнений, мы приходим к выводу, что в пленке распространяются два разных звука. Один из них, который можно назвать продольным, связан с флуктуациями плотности массы  $\delta\rho$  и дивергентной (продольной волновому вектору в Фурье-представлении) компонентой скорости  $v_\alpha$ . Скорость продольного звука  $c_l$  определяется из соотношения  $c_l^2 = -\partial\sigma/\partial\rho_0$ . Второй звук, который можно назвать изгибным, связан с флуктуациями смещения  $u$  и скоростью  $v_z$  (то есть с изгибными флуктуациями пленки). Его скорость  $c_s$  определяется из соотношения  $c_s^2 = \sigma/\rho_0$ , где  $\sigma = \sigma(\rho_0)$ . Кроме того, имеется степень свободы, связанная с вихревой (соленоидальной) компонентой скорости. Затравочно она описывается в рамках уравнения Навье-Стокса (12.1). Однако вязкий член в этом уравнении сильно ренормируется за счет флуктуаций.

Для того, чтобы исследовать флуктуационные поправки к законам дисперсии собственных мод свободно подвешенной пленки, надо снова использовать формализм, развитый в лекции 10 (на примере критической динамики). Этот формализм основан на эффективном действии  $\mathcal{I}$ , которое строится по динамическим уравнениям (12.25-12.28). Нас будут интересовать только первые поправки (высшие поправки оказываются пренебрежимыми). Поэтому достаточно сохранить квадратичный член в эффективном действии и ведущий (кубический)

член взаимодействия. Эти вклады имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{(2)} = \int dt dx dy \Big[ & p_u (\partial_t u - j_z / \rho_0) + p_p (\partial_t \delta \rho + \partial_\alpha j_\alpha) \\ & + p_z (\partial_t j_z - \rho_0 c_s^2 \nabla^2 u) + p_\alpha (\partial_t j_\alpha - c_l^2 \partial_\alpha \delta \rho) \Big], \end{aligned} \quad (12.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{(3)} = \int dt dx dy \Big\{ & p_u (j_z \delta \rho / \rho_0^2 - j_\alpha \partial_\alpha u / \rho_0) \\ & + p_z \partial_\alpha (j_\alpha j_z / \rho_0 + c_l^2 \partial_\alpha u \delta \rho) \\ & + p_\alpha \partial_\beta [j_\alpha j_\beta / \rho_0 + \rho_0 c_s^2 \partial_\alpha u \partial_\beta u + \delta_{\alpha\beta} \rho_0 (c_s^2 - c_l^2) (\nabla u)^2 / 2] \Big\}, \end{aligned} \quad (12.30)$$

где  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  является двумерной плотностью импульса и введены вспомогательные поля  $p$ , “сопряженные” всем гидродинамическим переменным. Подчеркнем, что вспомогательное поле  $\mathbf{p}$  “сопряжено” именно плотности импульса  $\mathbf{j}$ , для которого имеет место закон сохранения. Этот факт позволяет довольно просто выделять ультрафиолетовые расходимости и автоматически получать правильную зависимость флуктуационных поправок от волнового вектора.

Пренебрегая кинетическими (вязкими) членами, мы можем ограничиться вкладом (12.29) в квадратичное действие, которое приводит к следующим выражениям для затравочных значений Гриновских функций

$$\langle j_z(t, \mathbf{r}) p_z(0, 0) \rangle_0 = - \int \frac{d\omega d^2 q}{(2\pi)^3} \frac{\omega \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r})}{\omega^2 - c_s^2 q^2 + i0 \operatorname{sign}(\omega)}, \quad (12.31)$$

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha(t, \mathbf{r}) p_\beta(0, 0) \rangle_0 = - \int \frac{d\omega d^2 q}{(2\pi)^3} \Big\{ & \left[ \delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right] \frac{1}{\omega + i0} \\ & + \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \frac{\omega}{\omega^2 - c_l^2 q^2 + i0 \operatorname{sign}(\omega)} \Big\} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (12.32)$$

Здесь введены бесконечно малые затухания, которые обеспечивают правильные аналитические (причинные) свойства Гриновских функций. Выражение (12.31) соответствует изгибному звуку, а выражение (12.32) содержит в себе два вклада, первый из которых соответствует вихревой компоненте скорости, а второй соответствует продольному звуку.

Поскольку в действии (12.29) отсутствуют кинетические члены и члены, происходящие из Ланжевеновских сил, при его помощи невозможно найти затравочное значение парных корреляционных функций типа  $\langle uu \rangle$ . Однако вместо учета этих членов мы можем воспользоваться соотношениями между парными корреляционными функциями

ми и Гриновскими функциями, которые следуют из флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ) типа соотношения (10.19). В результате мы находим в том же приближении, которое ведет к (12.31,12.32)

$$\langle j_z(t, \mathbf{r}) j_z(0, 0) \rangle_0 = \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^2} c_s q T \rho_0 \delta(\omega^2 - c_s^2 q^2) e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (12.33)$$

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha(t, \mathbf{r}) j_\beta(0, 0) \rangle_0 = & \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^2} \left\{ \left[ \delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right] T \rho_0 \delta(\omega) \right. \\ & \left. + \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} c_l q T \rho_0 \delta(\omega^2 - c_l^2 q^2) \right\} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (12.34)$$

где  $T$  – температура.

Выражения (12.31-12.34) не исчерпывают все Гриновские функции и парные корреляционные функции, которые возникают в нашей задаче. Однако все остальные функции легко могут быть восстановлены с использованием линейных уравнений, которые заложены в квадратичном действии (12.29). Например, используя уравнение  $\partial_t u = j_z / \rho_0$ , мы находим из выражения (12.31)

$$\langle u(t, \mathbf{r}) p_z(0, 0) \rangle_0 = - \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^3} \frac{i}{\rho_0} \frac{\exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r})}{\omega^2 - c_s^2 q^2 + i0 \operatorname{sign}(\omega)}. \quad (12.35)$$

Кроме того, надо использовать уравнения на функции  $p$ , которые получаются при варьировании действия (12.29). Например, варьируя по  $u$ , мы получаем  $\partial_t + \rho_0 c_s^2 \nabla^2 p_z = 0$ . Комбинируя уравнения для переменных  $u, \delta\rho, \mathbf{v}$  и полей  $p$ , мы можем найти из (12.31-12.34) все Гриновские функции и парные корреляционные функции.

## 12.3 Флуктуационное затухание

Теперь мы приступаем к вычислению флуктуационных поправок к Гриновским функциям и парным корреляционным функциям. Главные поправки обусловлены действием третьего порядка (12.30). Они определяются теми же диаграммами, которые представлены на рисунках 11.2 и 11.3. Напомним, что сплошные линии на этих диаграммах соответствуют парным корреляционным функциям, в нашем случае (12.33,12.34) и тому подобное, а комбинированные линии соответствуют Гриновским функциям, в нашем случае (12.31,12.32) и тому подобное. Вершинные же функции на этих диаграммах определяются структурой действия (12.30).

Рассмотрим вклад в Гриновскую функцию  $\langle v_z p_z \rangle$ , соответствующий диаграмме, приведенной на рисунке 11.2. Нас будет интересовать

выражение, соответствующее петле  $G - F$  на этой диаграмме, которая имеет смысл однопетлевого вклада в собственно-энергетическую функцию  $\Sigma$ . Как следует из структуры действия (12.30), одна из линий на этой диаграмме соответствует изгибному звуку (то есть корреляционным функциям  $u, j_z, p_u, p_z$ ), а другая линия соответствует продольному звуку или вихревой скорости (то есть корреляционным функциям  $\delta\rho, j_\alpha, p_\rho, p_\alpha$ ). Это свойство является следствием инвариантности исходных уравнений (12.25-12.28) относительно преобразования  $u \rightarrow -u, v_z \rightarrow -v_z$ . Нас интересует значение  $\Sigma$  вблизи “массовой поверхности”  $\omega = \pm c_s q$ , так как именно оно определяет такие наблюдаемые величины, как затухание изгибного звука или парную корреляционную функцию смещения  $u$ . Используя выражения (12.31-12.34), мы заключаем, что  $\Sigma(\omega = c_s q, q)$  содержит множитель  $q^2$ , стоящий при интеграле, который расходится на больших волновых векторах. Эту расходимость надо было бы включить в ренормировку соответствующего коэффициента вязкости. Однако мы уже установили, что в силу симметрии вязкость для изгибного движения отсутствует. Поэтому упомянутая ультрафиолетовая расходимость должна быть положена равной нулю. Вычитая эту расходимость, мы приходим к выражению для  $\Sigma/q^2$ , которое определяется интегралом, “сидящем” на волновых векторах  $\sim q$ . Несложный анализ показывает, что этот интеграл пропорционален первой степени  $q$ . Таким образом, мы получаем окончательно  $\Sigma \propto q^3$ . Это означает, что вместо (12.31) мы имеем

$$\begin{aligned} \langle j_z(t, \mathbf{r}) p_z(0, 0) \rangle &= \langle u(t, \mathbf{r}) p_u(0, 0) \rangle \\ &= \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^3} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}) G(\omega, q), \\ G(\omega, q) &= -\frac{\omega}{\omega^2 - c_s^2 q^2 + i\omega\beta q^3}, \end{aligned} \quad (12.36)$$

где  $\beta$  – константа, которую можно оценить, как  $\beta \sim T/(\rho_0 c_l)$ .

Гриновская функция (12.36) определяет отклик на внешнюю силу  $f$ , приложенную к системе вдоль оси  $Z$ , эта сила может быть добавлена в правую часть уравнения (12.27). Поэтому положение полюса в правой части (12.36) определяет (в линейном приближении) затухание собственной моды (изгибного звука) с волновым вектором  $q$ . Таким образом, мы приходим к закону дисперсии

$$\omega = \pm c_s q - i\beta q^3/2 \quad (12.37)$$

для изгибного звука. Подчеркнем, что затухание изгибного звука в (12.37) имеет чисто флуктуационную природу. Сравнивая зависимость затухания от волнового вектора  $\propto q^3$  с обычным законом  $\propto q^2$ , мы



приходим к выводу, что изгибный звук затухает слабее, чем звук в обычной гидродинамике. В то же время затухание  $\propto q^3$  гораздо сильнее, чем затравочное затухание  $\propto q^4$ , которое возникает из-за отсутствия обычной вязкости для изгибной моды. Это оправдывает пренебрежение затравочным затуханием (и, вообще, кинетическим членом в уравнении на  $j_z$ ), которое оказывается мало по сравнению с флуктуационным в длинноволновом пределе.

Теперь мы можем перейти к вычислению парной корреляционной функции  $\langle j_z j_z \rangle$ . На диаграмме, представленной на рисунке 11.3, имеются петля  $F - F$ , которая определяет “поляризационную” функцию  $\Pi$ . Как и для петли  $G - F$ , одна из линий на этой диаграмме соответствует изгибному звуку (то есть корреляционным функциям  $u, j_z$ ), а другая линия соответствует продольному звуку или вихревой скорости (то есть корреляционным функциям  $\delta\rho, j_\alpha$ ). Опять-таки, нас интересует значение петли  $F - F$  на массовой поверхности  $\omega = \pm c_s q$ . Тогда в результате анализа, аналогичного анализу для  $\Sigma$ , мы находим  $\Pi \propto q^3$ . Более того, коэффициент при  $q^3$  в  $\Pi$  совпадает с точностью до температуры  $T$  с  $\beta$  (что есть отражение ФДТ). Суммируя лестничные ряды с петлями  $G - F$ , которые ведут к выражению (12.36) для Грин-овской функции, мы получаем для  $\langle j_z j_z \rangle$  выражение, которое может быть записано следующим образом

$$\begin{aligned}\langle u(t, \mathbf{r}) u(0, 0) \rangle &= \int \frac{d\omega d^2 q}{(2\pi)^3} e^{-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}} F(\omega, q), \\ \langle j_z(t, \mathbf{r}) j_z(0, 0) \rangle &= \int \frac{d\omega d^2 q}{(2\pi)^3} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}) \rho_0^2 \omega^2 F(\omega, q), \\ F(\omega, q) &= \frac{2T\beta\rho_0^{-1}q^3}{(\omega^2 - c_s^2 q^2)^2 + \omega^2 \beta^2 q^6},\end{aligned}\tag{12.38}$$

вместо (12.33). Отметим соотношение

$$\text{Im}G(\omega, q) = \frac{\omega^2 \rho_0}{2T} F(\omega, q),\tag{12.39}$$

которое является выражением ФДТ.

До сих пор мы рассматривали первые (однопетлевые) вклады в собственно-энергетическую функцию и поляризационную функцию, связанные с изгибным звуком. Возникает вопрос о роли поправок более высокого порядка. Оказывается, эти поправки являются малыми по сравнению с первой (рассмотренной выше). Малыми оказываются также поправки к вершинным функциям. Параметром, который определяет эту малость, является отношение флуктуационного затухания изгибного звука к его частоте, то есть  $\beta q^2 / c_s$ , в соответствии

с (12.37). Параметр  $\beta q^2/c_s$  стремится к нулю в длинноволновом пределе, что и объясняет малость высших поправок. Первый же вклад в собственно-энергетическую функцию обязательно надо принимать во внимание, поскольку он определяет затухание изгибного звука. Точно также следует принимать во внимание первый вклад в поляризационную функцию, поскольку именно он определяет выражение для парной корреляционной функции (12.38).

Спрашивается, почему приведенные выше аргументы не применимы к двумерной гидродинамике, рассмотренной в первой половине лекции? Ведь там, скажем, флуктуационный вклад в затухание звука пропорционален  $q^2$  (с точностью до логарифма), и потому отношение флуктуационного затухания к частоте звука  $sq$  мало (здесь  $s$  – скорость звука). Дело заключается в том, что в двумерной гидродинамике основные вклады в собственно-энергетическую функцию определяются петлями (типа приведенной на рисунке 11.2), где обе линии соответствуют одной и той же моде. В этом случае возникает “резонанс”, который приводит к значительному “усилению”, то есть соответствующий вклад в собственно-энергетическую функцию оказывается значительно больше своей наивной оценки. При этом обсуждаемый вклад оказывается чувствительным к затуханию моды (вязкости). Ничего подобного для изгибного звука в свободно подвешенной пленке не происходит, поскольку “резонансных” диаграмм для его собственно-энергетической функции нет в силу уже упоминавшейся инвариантности эффективного действия относительно преобразования  $u \rightarrow -u, v_z \rightarrow -v_z$ . Мы уже убедились в этом на примере первых петель, когда одна линия соответствовала изгибному звуку, а вторая – продольному звуку или вихревой моде. В частности, для изгибного звука вклады в собственно-энергетическую и поляризационную функции не чувствительны к затуханию мод, что и допускает использование беззатухательных выражений (12.31-12.34). Все это оправдывает наивные оценки для изгибного звука, приведенные выше.

Однако уже для продольного звука (или вихревой моды) возникают “резонансные” диаграммы для собственно-энергетической и поляризационной функций, связанные с петлями, содержащими две линии, соответствующие изгибному звуку. Именно эти петли (чувствительные к затуханию изгибного звука) и определяют затухание продольного звука и вихревой моды. К счастью, никаких высших поправок в данном случае учитывать не надо, так как мы используем уже ренормированные величины, относящиеся к изгибному звуку, а поправки к вершинным функциям являются пренебрежимыми. То есть в некотором смысле ситуация оказывается даже проще, чем для “чистой” двумерной гидродинамики.

Определим собвенно-энергетическую  $\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$  и поляризационную  $\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$  функции для продольного звука и вихревой моды:

$$\langle j_\alpha(t, \mathbf{r}) p_\beta(0, 0) \rangle = \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^3} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}),$$

$$G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = -\omega [\omega^2 \delta_{\alpha\beta} - c_l^2 q_\alpha q_\beta - \omega \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})]^{-1}, \quad (12.40)$$

$$\langle j_\alpha(t, \mathbf{r}) j_\beta(0, 0) \rangle = \int \frac{d\omega d^2q}{(2\pi)^3} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r}) F_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}),$$

$$F_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = -2G_{\alpha\gamma}(\omega, \mathbf{q}) \Pi_{\gamma\delta}(\omega, \mathbf{q}) G_{\delta\beta}(-\omega, \mathbf{q}), \quad (12.41)$$

вместо беззатухательных выражений (12.32, 12.34). Выражения, соответствующие петлям на рисунках 11.2 и 11.3, дают

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = -c_s^2 \int \frac{d\bar{\omega} d^2k}{(2\pi)^3} (k_{+\alpha} k_{-\beta} + k_{+\beta} k_{-\alpha} - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{k}_+ \mathbf{k}_-)$$

$$\mathbf{k}_- \mathbf{q} G(\omega_+, \mathbf{k}_+) F(\omega_-, \mathbf{k}_-), \quad (12.42)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} c_s^2 \rho_0^2 \int \frac{d\bar{\omega} d^2k}{(2\pi)^3} \left[ (k_{+\alpha} k_{-\beta} + k_{+\beta} k_{-\alpha} - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{k}_+ \mathbf{k}_-) \right.$$

$$\left. \times q_\gamma q_\delta (k_{+\gamma} k_{-\delta} - \delta_{\gamma\delta} \mathbf{k}_+ \mathbf{k}_- / 2) F(\omega_+, \mathbf{k}_+) F(\omega_-, \mathbf{k}_-), \quad (12.43) \right.$$

где  $\omega_\pm = \bar{\omega} \pm \omega/2$ ,  $\mathbf{k}_\pm = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2$ . В (12.43) мы сохранили только “резонансные” вклады, обсуждавшиеся выше, так что  $G$  и  $F$  относятся к изгибному звуку, они определены выражениями (12.36, 12.38).

Используя свойства симметрии подынтегрального выражения в соотношении (12.43) и уравнение (12.39), мы можем найти из (12.42, 12.43) следующее соотношение

$$\Pi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = -T \rho_0 \text{Im} \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}). \quad (12.44)$$

Далее, мы получаем из формул (12.40, 12.41) следующее соотношение между Гриновской функцией и парной корреляционной функцией

$$F_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = T \rho_0 \text{Im} G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}), \quad (12.45)$$

которое является выражением ФДТ.

После подстановки выражений (12.36, 12.38) в формулу (12.42) в получившемся интеграле явно выполняется интегрирование по частоте  $\bar{\omega}$ . Несложно убедиться, что в оставшемся интеграле по  $\mathbf{k}$  основной вклад набирается на волновых векторах  $k \gg q$ . Поэтому в нем можно опустить зависимость от внешних частоты  $\omega$  и волнового вектора  $\mathbf{q}$  везде, кроме сингулярного знаменателя  $\beta k^3 - i(\omega - c_s q \cos \theta)$ , где  $\theta$  – угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$ . После этого явно можно произвести интегрирование по абсолютной величине волнового вектора  $\mathbf{k}$ , в результате чего

мы получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q}) = & -\frac{iT}{12\rho_0\beta^{2/3}} \frac{q^{5/3}}{c_s^{1/3}} \left[ \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \Phi_l \left( \frac{\omega}{c_s q} \right) \right. \\ & \left. + \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \Phi_t \left( \frac{\omega}{c_s q} \right) \right], \end{aligned} \quad (12.46)$$

где введены следующие обозначения

$$\Phi_l(\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(\cos^2 \theta - 1/2)^2}{[i(\xi - \cos \theta)]^{1/3}} \left( i + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad (12.47)$$

$$\Phi_t(\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{[i(\xi - \cos \theta)]^{1/3}} \left( i + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (12.48)$$

Если  $\xi > 1$  или  $\xi < -1$ , то формулу (12.47) можно переписать в следующем виде

$$\Phi_l(\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{(\cos^2 \theta - 1/2)^2}{|\xi - \cos \theta|^{1/3}} \left( \frac{i}{\sqrt{3}} \text{sign}(\xi) + 1 \right). \quad (12.49)$$

Несложно найти значение

$$\Phi_t(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(4/3)}{\Gamma(17/6)} \sim 10^{-2}, \quad (12.50)$$

где  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. Выражения (12.47,12.48) определяют также аналитическое продолжение  $\Sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$  на комплексные  $\omega$ .

Теперь мы можем исследовать ренормированные законы дисперсии продольного звука и вихревой моды, которые определяются особенностями (полосами) Гриновской функции  $G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$ . Подставляя (12.46) в (12.40), мы находим выражение для Гриновской функции, которое распадается на продольную и поперечную волновому вектору  $\mathbf{q}$  части, как раз и соответствующие продольному звуку и вихревой моде. В продольную компоненту Гриновской функции входит функция (12.47), аргумент которой может быть взят равным  $\xi = \pm c_l/c_s$ . В результате мы находим закон дисперсии продольного звука

$$\omega = \pm c_l q - \frac{iT}{24\rho_0\beta^{2/3}} \frac{q^{5/3}}{c_s^{1/3}} \Phi_l(\pm c_l/c_s). \quad (12.51)$$

Поскольку  $\Phi_l$  имеет как действительную, так и мнимую части, то соответствующий член в (12.51) дает как затухание звука  $\propto q^{5/3}$ , так и поправку к его скорости (несущественную в длинноволновом пределе). В поперечную же компоненту Гриновской функции входит функция

(12.48), аргумент которой может быть взят равным  $\xi = 0$ . В результате мы находим закон дисперсии вихревой моды

$$\omega = -iCq^{5/3}, \quad C = \frac{T}{12\rho_0\beta^{2/3}c_s^{1/3}}\Phi_t(0). \quad (12.52)$$

Тот факт, что в правой части (12.52) стоит  $i$ , означает, что вихревая мода сохраняет свой чисто затухательный характер. Однако вместо диффузионного закона расплывания вихревых возмущений во времени имеет место аномальная диффузия, когда характерный размер возмущения растет со временем  $\propto t^{3/5}$ .

Полученные формулы позволяют также детально проанализировать парную корреляционную функцию  $F_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$ , исходя из соотношения (12.45). Например, для поперечной компоненты, соответствующей вихревой моде, мы получаем

$$F_t = \frac{2T\rho_0Cq^{5/3}}{\omega^2 + C^2q^{10/3}}. \quad (12.53)$$

Таким образом, мы получаем по частоте Лоренциан, как и в обычной гидродинамике, но ширина этого Лоренциана аномально зависит от волнового вектора.

Подведем итог нашего рассмотрения. Оказалось, что для свободно подвешенной пленки тепловые флуктуации играют чрезвычайно важную роль в динамике, полностью определяя диссипацию энергии на больших масштабах. Это приводит к аномальным степенным законам зависимости затухания всех гидродинамических мод от волнового вектора, а также к аномальным зависимостям от волнового вектора характерных частотных ширин и амплитуд парных корреляционных функций флуктуирующих величин. В то же время взаимодействие гидродинамических величин остается слабым, и потому в главном приближении их статистику можно считать Гауссовой.

## Задачи

### Задача 12.1

Рассмотрим двумерную гидродинамику. Предположим, что скалярное поле  $\theta$  описывается следующим стохастическим уравнением

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)\theta = D\nabla^2\theta + \zeta,$$

где  $\mathbf{v}$  – поле скорости, которое удовлетворяет уравнению Навье-Стокса (12.1), а  $\zeta$  – Ланжевеновская сила, которая обладает Гауссовой статистикой с парной корреляционной функцией

$$\langle \zeta(t_1, \mathbf{r}_1) \zeta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = -2DT\delta(t_1 - t_2)\nabla^2\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Найти уравнение ренорм-группы для коэффициента диффузии  $D$ .

### Решение задачи 12.1

Эффективное действие для рассматриваемой проблемы имеет вид

$$\mathcal{I} = \int dt d^2 r \left[ p \partial_t \theta + p \mathbf{v} \nabla \theta + D \nabla p \nabla \theta + iTD(\nabla p)^2 \right]. \quad (12.54)$$

Из-за структуры члена третьего порядка отсутствуют логарифмические поправки к члену с производной по времени, и, далее, в силу Галилеевской инвариантности отсутствуют логарифмические поправки к переносному члену с  $\mathbf{v} \nabla \theta$ . Таким образом, мы должны найти поправки только к  $D$ . Произведем элементарный шаг ренорм-групповой процедуры. Разделим поля на быструю и медленную компоненты  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}' + \tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\theta \rightarrow \theta' + \tilde{\theta}$  и подставим в действие. Тогда мы получим

$$\mathcal{I}_{\text{int}} = - \int dt d^2 r \nabla p' \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\theta}.$$

Вклад  $\Delta \mathcal{I}' = (i/2) \langle \mathcal{I}_{\text{int}}^2 \rangle$  дает поправку к последнему члену в (12.54), которая равна

$$\Delta D = \frac{1}{4T} \int \frac{d\omega d^2 q}{(2\pi)^3} \frac{2T\nu\rho^{-1}q^2}{\omega^2 + \nu^2 q^4} \frac{2TDq^2}{\omega^2 + D^2 q^4} = \frac{T}{4\pi\rho} \frac{1}{D + \nu} \Delta\xi.$$

Таким образом, мы находим следующее РГ-уравнение

$$\frac{dD}{d\xi} = \frac{T}{4\pi\rho(D + \nu)}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (12.23) для  $\nu$ , мы заключаем, что на больших масштабах коэффициент диффузии выходит на предельное значение

$$D \rightarrow \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \nu = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \sqrt{\frac{T\xi}{2\pi\rho}}.$$

## Лекция 13

# Пассивный скаляр

Перемешивание различных добавок в жидкости за счет ее гидродинамического движения является весьма распространенным явлением. Здесь мы изучаем физику так называемого пассивного скаляра (который может быть температурой или концентрацией примеси) в хаотическом или турбулентном потоке. Прилагательное “пассивный” при слове скаляр означает, что его обратной реакцией на жидкость можно пренебречь. Это справедливо для разбавленных растворов и для относительно слабых флуктуаций температуры. Перемешивание пассивного скаляра относится к широкому классу сильно неравновесных явлений.

Статистика пассивного скаляра оказывается чрезвычайно чувствительной к характеру гидродинамического движения, возбуждаемого в жидкости. Мы будем интересоваться в основном статистическими свойствами пассивного скаляра в гладких случайных потоках. Подобное движение имеет место в турбулентных жидкостях на масштабах меньше вязкой длины или возникает в результате развития крупномасштабных неустойчивостей в разбавленных полимерных растворах [60]. Теория такого перемешивания, восходящая к работам Бэтчелора [61, 62] и Крайчнана [63], была существенно развита в последние годы [64, 65, 66]. Мы также рассмотрим обобщение этой теории на случай так называемого мультифрактального поля скорости в рамках модели Крайчнана, когда скорость предполагается коротко коррелированной во времени (смотри обзоры [65, 66] и книгу [67]).

Обычно представляет интерес перемешивание пассивного скаляра в трехмерном пространстве. Однако в ряде случаев скорость можно считать двумерной (например, в тонком слое, или в силу каких-то обстоятельств скорость может оказаться зависящей только от двух координат и компонентой скорости вдоль третьего направления можно

пренебречь). Таким образом, имеет смысл рассматривать размерности пространства  $d = 2, 3$ . В то же время основные уравнения для пассивного скаляра можно сформулировать в пространстве произвольной размерности  $d$ . В дальнейшем (если не оговорено обратное) мы имеем в виду именно такой подход. Отметим, что в задаче о пассивном скаляре (как, впрочем, и вообще в турбулентных задачах) нет никакого аналога маргинальной размерности, и потому результаты оказываются не слишком чувствительными к размерности пространства.

## 13.1 Модель Крайчнана

Наряду с переносом скалярного поля  $\theta$  жидкостью имеет место его диффузия (термодиффузия). Эти два механизма определяют эволюцию распределения скаляра в пространстве-времени, которая описывается уравнением

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (13.1)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость потока, и  $\kappa$  – коэффициент диффузии. Мы считаем жидкость несжимаемой, то есть полагаем  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . Формальное решение проблемы Коши для уравнения (13.1) может быть записано в следующем виде

$$\theta(t_2, \mathbf{r}) = T \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ -\mathbf{v}(t) \nabla + \kappa \nabla^2 \right] \right\} \theta(t_1, \mathbf{r}), \quad (13.2)$$

где  $T \exp$  означает хронологически упорядоченную экспоненту (смотри Приложение А.3).

Заметим, что  $\int d^d r \theta$  является интегралом движения. (Это ясно и из его физического смысла, поскольку, скажем, для примесного случая  $\int d^d r \theta$  представляет собой общее количество примеси.) Сохранение величины  $\int d^d r \theta$  легко проверить непосредственно, вычисляя производную от нее по времени в соответствии с уравнением (13.1), что дает под интегралом полную дивергенцию в силу условия несжимаемости  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . При изучении эволюции поля  $\theta$  удобно исключить из рассмотрения сохраняющуюся величину  $\int d^d r \theta$ , произведя сдвиг

$$\theta \rightarrow \theta - V^{-1} \int d^d r \theta,$$

где  $V$  – объем системы. Другими словами, мы исключаем из поля  $\theta$  его среднее значение по пространству. Тогда мы приходим к следующему соотношению

$$\int d^d r \theta(\mathbf{r}) = 0. \quad (13.3)$$



Разумеется, условие (13.3) совместно с уравнением (13.1) в силу сохранения  $\int d^d r \theta$ .

Мы рассматриваем случайный поток, который должен характеризоваться статистически (через корреляционные функции скорости). Статистика потока предполагается однородной по времени, но может быть, вообще говоря, не однородна в пространстве. Мы считаем, что средняя скорость равна нулю. Тогда первой ненулевой корреляционной функцией скорости является парная корреляционная функция  $\langle v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) v_\beta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$ . Здесь угловые скобки означают усреднение по времени, которое может быть заменено на усреднение по реализациям скорости. В силу однородности статистики скорости по времени введенная корреляционная функция зависит только от разности времен  $t_1 - t_2$ .

В общем случае теоретический анализ статистики скорости в случайном потоке весьма затруднителен. Исследование существенно упрощается, если время корреляции скорости  $\tau$  много меньше характерного времени эволюции пассивного скаляра (времени перемешивания). Именно такую ситуацию мы имеем в виду в дальнейшем. Как видно из (13.2), скорость входит в формальное решение для пассивного скаляра в интегральном по времени виде. В этом случае в силу Центральной Предельной Теоремы на временах, много больших времени корреляции скорости  $\tau$ , она может считаться Гауссовой переменной, статистика которой полностью определяется парной корреляционной функцией скорости.

В случае коротко-коррелированной во времени скорости можно получить замкнутые уравнения для корреляционных функций пассивного скаляра. Объясним, как это можно сделать.

Возьмем разность времен  $t_2 - t_1$  много большей, чем время корреляции скорости  $\tau$ , но много меньше, чем характерное время эволюции скаляра (такой зазор существует в случае коротко-коррелированной во времени скорости), и исследуем изменение пассивного скаляра на временном интервале  $(t_1, t_2)$ . В этих условиях аргумент хронологически упорядоченной экспоненты в (13.2) является малым параметром и ее можно разложить в ряд. Достаточно удержать два первых члена этого разложения, что дает

$$\begin{aligned} \theta(t_2) \approx & \theta(t_1) + (t_2 - t_1) \kappa \nabla^2 \theta(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{v}(t) \nabla \theta(t_1) \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \mathbf{v}(t) \nabla [\mathbf{v}(t') \nabla \theta(t_1)] . \end{aligned} \quad (13.4)$$

Следующим шагом является усреднение по статистике скорости в интервале  $t_1, t_2$ . Это усреднение независимо от поведения скорости при

$t < t_1$  и  $t > t_2$  из-за условия  $t_2 - t_1 \gg \tau$ . Усредняя, скажем, выражение (13.4), можно получить выражение для среднего значения  $\langle \theta \rangle$  пассивного скаляра

$$\begin{aligned} \langle \theta(t_2, \mathbf{r}) \rangle - \langle \theta(t_1, \mathbf{r}) \rangle &= (t_2 - t_1) \kappa \nabla^2 \langle \theta(t_1, \mathbf{r}) \rangle \\ &+ (t_2 - t_1) \nabla_\alpha [D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \nabla_\beta \langle \theta(t_1, \mathbf{r}) \rangle] , \end{aligned} \quad (13.5)$$

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_0^\infty dt \langle v_\alpha(t, \mathbf{r}_1) v_\beta(0, \mathbf{r}_2) \rangle . \quad (13.6)$$

Мы распространили в (13.6) интегрирование по времени с промежутка  $t_2 - t_1$  до бесконечности, поскольку реально этот интеграл определяется временами порядка времени корреляции скорости  $\tau$  (которые по предположению много меньше  $t_2 - t_1$ ). При выводе (13.5, 13.6) мы использовали условие несжимаемости  $\nabla \mathbf{v} = 0$ . Величина  $D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ , входящая в уравнение (13.5), обычно называется тензором турбулентной диффузии. Поскольку  $t_2 - t_1$  много меньше, чем время перемешивания, то правая часть уравнения (13.5) является малой поправкой к  $\langle \theta \rangle$ . Следовательно, уравнение (13.5) может быть переписано в дифференциальной форме:

$$\partial_t \langle \theta \rangle = \nabla_\alpha [D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \nabla_\beta \langle \theta \rangle] + \kappa \nabla^2 \langle \theta \rangle . \quad (13.7)$$

Приведенный вывод подобен выводу уравнения Фоккера-Планка (смотри Приложение А.2).

Аналогичным образом, стартуя с уравнения (13.2), можно получить замкнутые уравнения для высших корреляционных функций  $\theta$ . Например, уравнение для парной корреляционной функции  $F$  имеет вид

$$\partial_t F(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \kappa (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) F \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} &+ \nabla_{1\alpha} [D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \nabla_{1\beta} F] + \nabla_{2\alpha} [D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \nabla_{2\beta} F] \\ &+ \nabla_{1\alpha} [D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \nabla_{2\beta} F] + \nabla_{2\alpha} [D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \nabla_{1\beta} F] , \end{aligned} \quad (13.9)$$

$$F(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \theta(t, \mathbf{r}_1) \theta(t, \mathbf{r}_2) \rangle .$$

В общем виде, уравнение для корреляционной функции  $n$ -го порядка пассивного скаляра  $F_n$  имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t F_n &= \kappa \sum_{m=1}^n \nabla_m^2 F_n \\ &+ \sum_{m,k=1}^n \nabla_{m\alpha} [D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_k) \nabla_{k\beta} F_n] , \end{aligned} \quad (13.10)$$

$$F_n(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \langle \theta(t, \mathbf{r}_1) \dots \theta(t, \mathbf{r}_n) \rangle . \quad (13.11)$$

Структура уравнения (13.10) вполне понятна: эволюция корреляционных функций пассивного скаляра определяется совместным действием обычной (как часто говорят, молекулярной) диффузии (первый член в правой части уравнения) и турбулентной диффузии (второй член в правой части уравнения).

Мы приступаем к анализу однородного случая (который предполагает в частности, что случайное течение возбуждается в большом объеме, то есть с размерами, большими по сравнению с характерными длинами, которые нас будут интересовать). В этом случае все корреляционные функции скорости будут функциями разностей координат. В частности, парная корреляционная функция скорости  $\langle v_\alpha(t_1, \mathbf{r}_1) v_\beta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$  зависит только от разности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Соответственно, зависит от этой разности и тензор турбулентной диффузии (13.6). Предполагая также изотропию и учитывая условие несжимаемости, мы находим

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathcal{K}_0 \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{K}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})], \quad (13.12)$$

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} \equiv \frac{r}{d-1} \partial_r V(r) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2} \right) + V(r) \delta_{\alpha\beta}, \quad (13.13)$$

где  $d$  – размерность пространства,  $\mathcal{K}_0$  – некоторая константа, а  $V(r)$  – функция, характеризующая зависимость амплитуды флуктуаций скорости от масштаба, на которую мы накладываем условие  $V(0) = 0$ .

Представление (13.12) мотивированно тем, что для реальной развитой турбулентности главный вклад в корреляционные функции скорости связан с самым длинными флуктуациями, масштаб которых  $L$  (так называемый интегральный масштаб) определяется способом возбуждения турбулентности. На масштабах  $r \ll L$  турбулентные флуктуации намного слабее, чем на интегральном масштабе, что означает  $\mathcal{K}_0 \gg \mathcal{K}$  при  $r \ll L$ . Турбулентность обладает еще одним масштабом  $\eta$  – вязким (или Колмогоровским). В интервале масштабов от  $\eta$  до  $L$  (который называется инерционным) вязкость жидкости несущественна и поле скорости обладает сложной (как иногда говорят, мультифрактальной) структурой, что выражается в степенном характере корреляционных функций скорости [68]. В рамках нашей короткокоррелированной во времени и Гауссовой модели скорости ее статистика задается парной корреляционной функцией, а степенной характер корреляций выражается в соотношении  $V \propto r^{2-\gamma}$ , где  $\gamma$  – некоторая степень, на которую наложено ограничение  $0 < \gamma < 2$ . Модель с таким поведением корреляционной функции называется моделью Крайчнана. Таким образом, в рамках модели Крайчнана в инерционном интервале, то есть при  $\eta \ll r \ll L$ , мы можем написать

$$V = A r^{2-\gamma} / \eta^\gamma, \quad (13.14)$$

где  $A$  – некоторая константа, имеющая размерность обратного времени и характеризующая мощность флуктуаций скорости.

На масштабах меньше  $\eta$  существенна вязкость жидкости, которая делает поле скорости гладким, то есть оно может быть разложено в ряд Тейлора. Мы удержим главный член разложения  $V = Ar^2$ . Будем считать, что здесь  $A$  – та же константа, что и в законе (13.14) (это фиксирует величину  $\eta$ ). Отметим, что масштабам  $r \ll \eta$  формально соответствует выражение (13.14) с  $\gamma = 0$ . Подставляя выражение  $V = Ar^2$  в соотношения (13.12, 13.13), и дифференцируя дважды, мы получаем

$$-\nabla_\beta \nabla_\nu D_{\alpha\mu}(\mathbf{r}) = \frac{A}{d-1} [(d+1)\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}]. \quad (13.15)$$

Это соотношение дает парную корреляционную функцию градиентов скорости, которая оказывается не зависящей от масштаба. Тензорная структура правой части уравнения (13.15) отражает предполагаемые статистическую однородность, изотропию и условие несжимаемости.

Сравнивая теперь диффузионный член в уравнении (13.7) (с коэффициентом  $\kappa$ ) с членом, представляющим турбулентную диффузию, мы находим диффузионную длину  $r_d = \sqrt{\kappa/A}$ . Здесь мы использовали выражение  $V = Ar^2$ , считая, что  $r_d < \eta$ . Такое неравенство характерно и для примесей, и для температуры, а, скажем, для полимерных молекул или для частичек пыли  $r_d$  обычно на много порядков меньше  $\eta$ . В дальнейшем мы будем иметь в виду именно такую ситуацию. На масштабах  $r \gg r_d$  молекулярной диффузией можно пренебречь, в то время как при  $r \ll r_d$  она играет главную роль, приводя к “сглаживанию” поля  $\theta$  на этих масштабах.

## 13.2 Эволюция пассивного скаляра

Исследуем теперь уравнение (13.8) для парной корреляционной функции, которая в нашем однородном и изотропном случае зависит только от  $r = |\mathbf{r}|$ . Тогда из уравнения (13.8) можно найти

$$\partial_t F + \hat{L}F = 0, \quad \hat{L} = -r^{1-d}\partial_r r^{d-1} [V(r) + \kappa] \partial_r. \quad (13.16)$$

Мы будем считать, что в момент времени  $t = 0$  задано некоторое распределение  $F(0, r)$ , и будем изучать его эволюцию во времени. Дифференциальный оператор  $\hat{L}$  в уравнении (13.16) является неотрицательным и самосопряженным по отношению к стандартной мере  $\int dr r^{d-1}$  и при естественных условиях, что  $F(r)$  является гладкой вблизи нуля, то есть  $\partial_r F(r=0) = 0$ , и  $F(r)$  достаточно быстро стремится к

нулю при больших  $r$ . Поэтому все собственные значения оператора  $\hat{L}$  являются неотрицательными, что означает монотонное затухание  $F$  со временем при любых начальных условиях. Отметим, что условие (13.3) приводит к следующему условию на парную корреляционную функцию

$$\int dr r^{d-1} F(r) = 0. \quad (13.17)$$

Разумеется, условие (13.17) совместно с уравнением (13.16) при принятых граничных условиях на функцию  $F$ . Это легко проверить непосредственно, вычисляя производную по времени от  $\int dr r^{d-1} F$  в соответствии с уравнением (13.16) и убеждаясь, что эта производная равна нулю.

Конкретные законы эволюции парной корреляционной функции зависят от начальных условий, точнее, от того, в какой области масштабов сосредоточен пассивный скаляр  $\theta$ . Предположим, что вначале он был скоррелирован на масштабе  $r_0$  из интервала, ограниченного вязкой и диффузионной длинами  $r_d \ll r_0 \ll \eta$ . Это означает, что  $F(0, r) \approx F(0, 0)$  при  $r < r_0$  и достаточно быстро спадает при  $r > r_0$ . Тогда начальный этап эволюции будет определяться поведением корреляций скорости при  $r \ll \eta$ , когда можно использовать приближение  $V = Ar^2$ . В этом случае уравнение (13.16) дает

$$\partial_t F = Ar^{1-d} \partial_r (r^{d+1} \partial_r F), \quad (13.18)$$

где мы пренебрегли диффузией (что справедливо при  $r \gg r_d$ ). Удобно переписать это уравнение в терминах логарифмической переменной  $\xi = \ln(\eta/r)$

$$\partial_t F = A(\partial_\xi^2 - d\partial_\xi)F. \quad (13.19)$$

Заметим, что условие  $\eta > r$  означает  $\xi > 0$ . Как следует из (13.19), для функции  $r^{d/2}F$  мы получаем “диффузионное” уравнение, решение которого легко выражается через начальные условия. В результате мы находим

$$F(t, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4\pi At}} \exp\left(-\frac{x^2}{4At} + \frac{d}{2}x - \frac{d^2}{4}At\right) F(0, re^x). \quad (13.20)$$

Анализ выражения (13.20) приводит к следующим выводам. При  $r \ll r_- = r_0 \exp(-Atd)$  аргумент  $re^x$  в правой части (13.20) можно заменить на 0, и мы находим  $F(t, r) \approx F(0, 0)$ , то есть в этой области  $F$  не меняется. При  $r \gg r_-$  интегрирование по  $x$  в (13.20) ограничено за

счет аргумента функции  $F$ . При этом интеграл набирается при  $re^x \sim r_0$ , и мы находим универсальное поведение

$$F(t, r) \propto \exp \left[ -\frac{1}{4At} \left( \ln \frac{r}{r_0} \right)^2 - \frac{d}{2} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{d^2}{4} At \right]. \quad (13.21)$$

Обратим внимание на то, что при  $|\ln(r/r_0)| < \sqrt{At}$  функция  $F$  экспоненциально затухает со временем, а ее зависимость от  $r$  носит степенной характер. При  $t = t_d$ , где  $t_d = (Ad)^{-1} \ln(r_0/r_d)$ , масштаб  $r_-$  достигает  $r_d$ , после чего, при  $t > t_d$ , уже на всех масштабах  $r < r_0 \exp(2\sqrt{At})$  будет наблюдаться экспоненциальное затухание  $F$ . Это затухание является следствием размешивания пассивного скаляра случайным полем скорости, которое производит как большие, так и малые масштабы, то есть происходит “расплывание” пассивного скаляра по масштабам. Со времени  $t = t_d$  начинается интенсивное поглощение флуктуаций пассивного скаляра с малыми масштабами (порядка  $r_d$ ) за счет диффузии.

Можно также поставить вопрос о том, на каких масштабах сосредоточен пассивный скаляр в разные моменты времени. Для этого заметим, что величина  $F(r)r^d$  определяет количество пассивного скаляра, сосредоточенного в данном интервале масштабов  $d\xi = dr/r$  (то есть на логарифмической по  $r$  шкале). Эта величина  $F(r)r^d$ , как следует из выражения (13.21), достигает своего максимума при  $r \sim r_+$ , где  $r_+ = r_0 \exp(Atd)$ . Таким образом, максимум распределения пассивного скаляра быстро (экспоненциально) движется вверх по масштабам. За время  $t_\eta = (Ad)^{-1} \ln(\eta/r_0)$  масштаб  $r_+$  достигает вязкой длины  $\eta$ , после чего описание в терминах уравнения (13.18) перестает работать, и надо возвращаться к общему уравнению (13.16).

Прежде, чем это сделать, мы отдельно изучим эволюцию парной корреляционной функции пассивного скаляра в инерционном интервале масштабов  $\eta \ll r \ll L$ . В этом случае мы можем воспользоваться выражением (13.14), которое в приводит к следующему уравнению для парной корреляционной функции

$$\partial_t F = \frac{A}{\eta^\gamma} r^{1-d} \partial_r (r^{d+1-\gamma} \partial_r F), \quad (13.22)$$

где мы пренебрегли диффузионным членом. Удобно сделать преобразование к новой функции  $\Phi$  и к новой безразмерной переменной  $z$ :

$$F = r^{1-d} \partial_r (r^{d/2} \Phi), \quad z = \frac{2}{\gamma} \left( \frac{r}{\eta} \right)^{\gamma/2}.$$

Тогда уравнение (13.22) приобретает следующий вид

$$\partial_t \Phi = A \left( \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \Phi, \quad (13.23)$$

где  $\nu = d/\gamma$ . Мы будем считать, что  $\Phi(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Тогда соотношение (13.17) приводит к условию  $\Phi(z=0) = 0$ .

Гриновская функция для уравнения (13.23) (и при нулевых значениях  $\Phi$  в нуле и бесконечности) может быть найдена явно (смотри задачу к параграфу). Используя выражения для нее, мы можем выразить решение уравнения (13.23) через начальные условия

$$\Phi(t, z) = \int_0^\infty dx \Phi(0, x) \frac{x}{2At} I_\nu \left( \frac{zx}{2At} \right) \exp \left( -\frac{z^2 + x^2}{4At} \right). \quad (13.24)$$

Если начальное распределение  $\Phi(0, z)$  достаточно быстро убывает с ростом  $z$ , то мы находим на больших временах

$$\Phi(t, z) \propto \frac{z^\nu}{t^{\nu+1}} \exp \left( -\frac{z^2}{4At} \right).$$

Пересчитывая этот закон для функции  $F$ , мы получаем универсальную асимптотику

$$F(t, r) \propto \frac{r^{1-d}}{t^{1+d/\gamma}} \partial_r \left[ r^d \exp \left( -\frac{r^\gamma}{\gamma^2 At \eta^\gamma} \right) \right]. \quad (13.25)$$

Конечно, выражение (13.25) удовлетворяет (13.17). Отметим, что при  $r^\gamma \ll At \eta^\gamma$

$$F(t, r) \propto \frac{1}{t^{1+d/\gamma}} \left( 1 - \frac{\gamma + d}{d\gamma^2} \frac{r^\gamma}{At \eta^\gamma} \right). \quad (13.26)$$

Таким образом, в этом интервале масштабов зависимость парной корреляционной функции как от времени, так и от расстояния  $r$  имеет степенной характер.

Вернемся теперь к эволюции пассивного скаляра, первоначально сконцентрированного на масштабе  $r_0$  из интервала  $r_d \ll r_0 \ll \eta$ . Как мы уже убедились, большая часть пассивного скаляра движется вверх по масштабам, достигая границы инерционного интервала за время  $t_\eta$ . Далее пассивный скаляр “проскакивает” в инерционный интервал, и начинается его эволюция в нем, которая нечувствительна к тому, что происходит на масштабах  $r < \eta$ , и описывается приведенными выше выражениями. “Остатки” же пассивного скаляра на масштабах  $r < \eta$  экспоненциально быстро вымирают. Однако инерционный интервал становится “резервуаром” для масштабов  $r < \eta$ , “инжектируя” туда небольшое количество пассивного скаляра. На формальном языке

это означает, что мы должны решать уравнение (13.19) с граничным условием, заданном на  $r \sim \eta$  (то есть при  $\eta = 0$ ) и навязываемом эволюцией скаляра в инерционном интервале. Как мы уже убедились, на масштабах вблизи  $\eta$  функция  $F$  затухает степенным образом со временем. Поэтому упомянутое граничное условие приводит к степенному затуханию скаляра со временем при  $r < \eta$  и, соответственно, к слабой (логарифмической) зависимости  $F$  от масштабов. Поэтому, исследуя интервал  $r_d < r < \eta$ , мы можем пренебречь второй производной по  $\xi$  (при  $\xi \gg 1$ ) в уравнении (13.19). В результате мы находим уравнение  $(\partial_t + Ad\partial_\xi)F = 0$ , которое легко решается методом характеристик. На временах  $t \gg (Ad)^{-1} \ln(\eta/r_d)$  мы приходим к решению

$$F(t, r) \propto (t - Ad\xi)^{-1-d/\gamma}, \quad (13.27)$$

справедливому при  $r_d < r < \eta$ . При  $r < r_d$  координатная зависимость в  $F$  исчезает за счет диффузии.

### 13.3 Стационарная статистика

Теперь мы рассмотрим статистику пассивного скаляра при наличии постоянного вброса (накачки). Речь может идти, скажем, о распределении в турбулентной атмосфере дыма, который выбрасывают промышленные предприятия, или температуры, флуктуации которой порождает неоднородно нагретая поверхность Земли. Еще один класс задач такого типа связан с крупномасштабным градиентом пассивного скаляра. Поясним подробнее, о чем идет речь. Предположим, что имеется стационарная компонента поля  $\theta$ , которая меняется в пространстве. Такая ситуация типична для атмосферы, где имеется вертикальный градиент как температуры, так и распределения примесей (газов, пыли). Тогда поле  $\theta$  имеет стационарную неоднородную  $\theta_0$  и флуктуирующую  $\theta'$  компоненты. Разделяя их, мы можем записать уравнение (13.1) в виде

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla - \kappa\nabla^2)\theta' = -\mathbf{v}\nabla\theta_0,$$

где мы опустили диффузионный член с  $\theta_0$ , считая, что он пренебрежимо мал по сравнению с  $\mathbf{v}\nabla\theta_0$  в силу медленности изменения  $\theta_0$  в пространстве. Таким образом, мы возвращаемся к уравнению (13.1), но с дополнительным членом в правой части, который и описывает эффективный вброс пассивного скаляра. Обратим внимание на то, что эта сила является случайной функцией, если таковой является скорость.

Далее мы рассматриваем уравнение для пассивного скаляра

$$(\partial_t + \mathbf{v}\nabla - \kappa\nabla^2)\theta = \phi, \quad (13.28)$$



с “силой”  $\phi$  в правой части, не специфицируя происхождение этой силы. Будем считать ее статистику независимой от статистики скорости (корреляционные функции пассивного скаляра не чувствительны к этому условию, но оно позволяет упростить вычисления). Поскольку мы исключаем из поля  $\theta$  его среднее по пространству значение, то же самое надо сделать и с силой  $\phi$ , произведя вычитание

$$\phi \rightarrow \phi - V^{-1} \int d^d r \phi,$$

дающее условие

$$\int d^d r \phi = 0. \quad (13.29)$$

Как и в случае со случайной скоростью, мы будем считать  $\phi$  случайной функцией, коротко коррелированной во времени и обладающей Гауссовой и однородной по времени статистикой. Такая статистика полностью характеризуется парной корреляционной функцией  $\phi$ , которая в однородном (и коротко-коррелированном во времени) случае сводится к интегралу

$$\chi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \int dt_1 \langle \phi(t_1, \mathbf{r}_1) \phi(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle. \quad (13.30)$$

Функция  $\chi(r)$  определяет характер пространственных корреляций силы  $\phi$ . Соотношение (13.29) приводит к интегральному условию

$$\int_0^\infty dr r^{d-1} \chi(r) = 0, \quad (13.31)$$

наложенному на функцию  $\chi$ .

Выведем уравнения для парной корреляционной функции  $F$  пассивного скаляра при наличии постоянного вброса с описанной выше статистикой. В этом случае в правую часть уравнения (13.16) добавится член, связанный с силой в правой части (13.28):

$$\langle \theta(t, \mathbf{r}_1) \phi(t, \mathbf{r}_2) + \theta(t, \mathbf{r}_2) \phi(t, \mathbf{r}_1) \rangle.$$

Чтобы найти это среднее, можно заметить, что с  $\phi(t)$  коррелирует только вклад в  $\theta(t)$ , порождаемый той же накачкой в близкие времена. Таким образом,  $\theta(t)$  в приведенном выражении можно заменить на интеграл  $\int^t dt' \phi(t')$ , взятый по некоторой небольшой окрестности  $t$ . Используя затем соотношение (13.30) и учитывая, что, как и выше, интеграл  $\int^t dt' \langle \phi(t', \mathbf{r}_1) \phi(t', \mathbf{r}_2) \rangle$  равен половине  $\chi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ , мы находим окончательно

$$\partial_t F(r) + \hat{L}F(r) = \chi(r), \quad (13.32)$$

то есть уравнение теперь является неоднородным, имея “источник” в правой части.

При наличии этого источника корреляционная функция  $F$  выходит со временем на стационарное решение, которое определяется следующим уравнением

$$\partial_r \{r^{d-1} [V(r) + \kappa] \partial_r\} F = -r^{d-1} \chi(r), \quad (13.33)$$

которое получается из (13.32) при подстановке явного выражения оператора  $\hat{L}$  из (13.16). Интегрируя это уравнение, мы находим

$$r^{d-1} [V(r) + \kappa] \partial_r F = -U(r), \quad U(r) = \int_0^r dr_1 r_1^{d-1} \chi(r_1). \quad (13.34)$$

На длинах, много меньших длины корреляции  $\phi$ , величину  $\chi(r)$  можно считать константой, то есть на этих длинах  $U \propto r^d$ . В силу же условия (13.31)  $U(r)$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Поэтому решение уравнения (13.34), стремящееся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , записывается в следующем виде

$$F(r) = \int_r^\infty dr_1 \frac{U(r_1)}{r_1^{d-1} [V(r_1) + \kappa]}.$$

Легко понять, что при  $r \rightarrow 0$   $F(r)$  остается конечной.

Исследуем поведение  $F(0) - F(r)$  на длинах много меньше, чем длина корреляции силы  $\phi$ , когда  $U \propto r^d$ . Тогда мы находим

$$F(0) - F(r) \propto \int_0^r \frac{dr_1 r_1}{V(r_1) + \kappa}. \quad (13.35)$$

На длинах  $r < r_d$  членом с  $V$  в уравнении (13.35) можно пренебречь, и мы находим гладкое поведение  $F(0) - F(r) \propto r^2$ . В области  $r_d < r < \eta$  мы имеем  $V \propto r^2$ , и, соответственно,  $F(r_d) - F(r) \propto \ln(r/r_d)$ . В инерционном же интервале  $r > \eta$  мы имеем  $V \propto r^{2-\gamma}$ , и, соответственно,  $F(\eta) - F(r) \propto r^\gamma$ . Таким образом, каждый из интервалов длин характеризуется своим собственным поведением парной корреляционной функции пассивного скаляра.

В рамках рассмотренной модели несложно выписать уравнения для высших корреляционных функций пассивного скаляра, обобщающие (13.32). Они представляют из себя уравнения (13.10), в правую часть которых добавляются дополнительные члены, связанные с вбросом. Однако найти точные решения этих уравнений даже в стационарном случае до сих пор не удавалось. Это оказалось возможным только в некоторых предельных случаях [71]. В общем случае можно только сказать, что, как и для парной корреляционной функции, в интервале

$r < r_d$  высшие корреляционные функции обладают гладким поведением, в области  $r_d < r < \eta$  это поведение логарифмическое, а в инерционном интервале  $r > \eta$  оно степенное. Несколько более подробную информацию о высших корреляционных функциях пассивного скаляра можно получить для интервала  $r < \eta$ , где поле размешивающей скорости является гладким. Этот случай рассматривается в следующем разделе.

## 13.4 Мелкомасштабная статистика

Изучим статистику пассивного скаляра на масштабах, меньших вязкой длины  $\eta$ , считая, что длина корреляции  $l$  силы  $\phi$  меньше вязкой длины. Для этой задачи существенны только масштабы  $r \lesssim l$ , где поле скорости является гладким. В этом случае можно детально исследовать статистику пассивного скаляра. Мы сосредоточимся на его одноточечной статистике.

Мы используем понятие Лагранжевых траекторий, вдоль которых движутся частицы жидкости. Такая траектория  $\mathbf{X}(t)$  определяется уравнением  $\partial_t \mathbf{X} = \mathbf{v}(t, \mathbf{X})$ , которое означает просто, что частица жидкости движется со скоростью  $\mathbf{v}$ . Отсюда для эволюции вектора  $\delta \mathbf{X}$ , концы которого движутся по двум близким Лагранжевым траекториям, получается уравнение

$$\partial_t \delta X_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}(t) \delta X_\beta, \quad (13.36)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = \nabla_\beta v_\alpha(t, \mathbf{X}) \quad (13.37)$$

Мы видим, что матрица  $\hat{\sigma}$  определена на некоторой Лагранжевой траектории. Решение уравнения (13.36) можно записать в следующем виде

$$\delta \mathbf{X}(t) = \hat{V}(t, t_0) \delta \mathbf{X}(t_0), \quad (13.38)$$

где  $\hat{W}$  – хронологически упорядоченная экспонента (смотри Приложение А.3)

$$\hat{W}(t, t_0) = T \exp \left[ \int_{t_0}^t dt_2 \hat{\sigma}(t_2) \right], \quad (13.39)$$

которая является решением уравнения  $\partial_t \hat{W} = \hat{\sigma} \hat{W}$  с начальным условием  $\hat{W}(t_0, t_0) = 1$ . В соответствии с выражением (13.38) матрица  $\hat{W}$  определяет деформацию жидкого объема, движущегося вблизи Лагранжевой траектории  $\mathbf{X}(t)$ . Заметим, что условие несжимаемости жидкости записывается в виде  $\sigma_{\alpha\alpha} = 0$ , то есть матрица  $\hat{\sigma}$  является бесследовой. Отсюда следует, что детерминант матрицы  $\hat{W}$  равен единице.

Исследуем эволюцию пассивного скаляра  $\theta$  в окрестности некоторой Лагранжевой траектории  $\mathbf{X}(t)$ . Если расстояние от точки наблюдения  $\mathbf{r}$  до  $\mathbf{X}$  меньше  $\eta$ , то поле скорости  $\mathbf{v}$  можно разложить в ряд Тейлора, и мы получаем из уравнения (13.28)

$$\partial_t \theta + [\partial_t \mathbf{X} + \hat{\sigma} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{X})] \nabla \theta = \kappa \nabla^2 \theta + \phi. \quad (13.40)$$

Здесь  $\partial_t \mathbf{X}$  представляет собой скорость жидкости, взятую на Лагранжевой траектории  $\mathbf{X}(t)$ , а матрица  $\sigma_{\alpha\beta}(t)$  представляет собой градиент скорости  $\nabla_\beta v_\alpha$ , взятый на той же Лагранжевой траектории. Сделаем теперь несколько модифицированное Фурье-преобразование

$$\theta = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{X})] \theta(\mathbf{k}), \quad (13.41)$$

и такое же преобразование для  $\phi$ . В результате уравнение (13.40) переписывается в следующем виде

$$\partial_t \theta(\mathbf{k}) - \left( \mathbf{k} \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) \theta(\mathbf{k}) + \kappa k^2 \theta(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{k}). \quad (13.42)$$

Решение этого уравнения можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \theta(t_1, \mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^{t_1} dt \exp \left\{ -\kappa \int_t^{t_1} dt' \left| \mathbf{k} \hat{W}(t_1, t') \right|^2 \right\} \\ &\times \phi \left[ t, \mathbf{k} \hat{W}(t_1, t) \right], \end{aligned} \quad (13.43)$$

где  $\hat{W}$  – та же матрица (13.39).

Мы рассмотрим статистику следующего объекта

$$\theta_a = \int \frac{d^d r}{(2\pi a^2)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{X})^2}{2a^2} \right] \theta(\mathbf{r}), \quad (13.44)$$

который представляет собой пассивный скаляр, “размазанный” по окрестности точки  $\mathbf{X}$  размера  $a$ . Мы будем считать, что  $a$  меньше  $l$ , но больше диффузионного размера  $r_d$ . При условии  $a \gg r_d$  экспоненту с  $\kappa$  в выражении (13.43) можно заменить на единицу, и мы находим из (13.41)

$$\theta_a(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} dt \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \exp \left[ -\frac{a^2}{2} \left| \mathbf{q} \hat{W}^{-1}(t_1, t) \right|^2 \right] \phi(t, \mathbf{q}), \quad (13.45)$$

где мы поменяли порядок интегрирования и перешли к интегрированию по волновому вектору  $\mathbf{q} = \mathbf{k} \hat{W}(t_1, t)$ . (Отметим, что Якобиан этого

преобразования равен единице, поскольку единице равен детерминант матрицы  $\hat{W}$ ). Характерное значение вектора  $\mathbf{q}$  в (13.45) определяется длиной корреляции силы  $\phi$ , то есть  $q \sim l^{-1}$ . Что же касается абсолютного значения вектора  $\mathbf{q}\hat{W}^{-1}$ , то оно растет со временем  $t$ , что обеспечивает сходимость интеграла (13.45) по времени.

Статистика  $\theta$  определяется усреднением по статистике силы  $\phi$  и матрицы  $\hat{W}$ . Мы опять будем считать статистику силы Гауссовой и коротко коррелированной во времени. В этом случае усреднение по статистике силы можно произвести явно, и мы получаем для плотности вероятности  $\theta_a$

$$\mathcal{P}(\theta_a) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta}} \exp \left( -\frac{\theta_a^2}{2\Theta} \right) \right\rangle, \quad (13.46)$$

$$\Theta = \int_{-\infty}^0 dt \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \chi(q) \exp \left[ -a^2 \mathbf{q} \hat{\Pi}(t) \mathbf{q} \right], \quad (13.47)$$

$$\hat{\Pi}(t) = \left[ \hat{W}^T(0, t) \hat{W}(0, t) \right]^{-1}, \quad (13.48)$$

где  $\chi(q)$  – Фурье-преобразование корреляционной функции силы, введенной соотношением (13.30), а угловые скобки в уравнении (13.46) означают усреднение по статистике матрицы  $\hat{W}$ . При переходе от (13.45) к (13.46, 13.47) мы положили  $t_1 = 0$ . Заметим, что  $\hat{\Pi}$  является симметричной положительно определенной матрицей с единичным детерминантом (так как равен единице детерминант матрицы  $\hat{W}$ ).

Далее мы ограничимся двумерным случаем  $d = 2$  с тем, чтобы избежать излишних технических трудностей (общий характер статистики пассивного скаляра не зависит от размерности). Выражение (13.47) приобретает при  $d = 2$  следующий вид

$$\Theta = \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty \frac{dq q}{2\pi} \chi(q) \exp \left[ -a^2 q^2 \cosh(\varrho) \right] I_0 \left[ a^2 q^2 \sinh(\varrho) \right], \quad (13.49)$$

где  $e^{\pm\varrho}$  – собственные значения матрицы  $\hat{\Pi}$  (произведение которых равно единице из-за единичности детерминанта  $\hat{\Pi}$ ). Таким образом, для определения плотности вероятности (13.46) достаточно знать статистические свойства  $\varrho$ . Реально нам надо знать статистические свойства  $\varrho$  при  $\varrho \gg 1$ . Действительно, характерное значение  $q$  определяется  $l^{-1}$ , то есть главный вклад в интеграл (13.49) набирается при  $\varrho \sim \ln(l/a) \gg 1$ .

Чтобы установить статистические свойства  $\varrho$ , мы свяжем между собой  $\hat{\Pi}(t - \Delta t)$  и  $\hat{\Pi}(t)$  (здесь  $t < 0$ ). Для этого мы воспользуемся свойством мультипликативности матрицы  $\hat{W}$ :

$$\hat{W}(t_1, t_2) = \hat{W}(t_1, t_3) \hat{W}(t_3, t_2),$$

где  $t_1 > t_3 > t_2$ . Это свойство следует непосредственно из определения (13.39). Используя свойство мультипликативности, мы получаем

$$\hat{\Pi}(t - \Delta t) = \hat{W}^{-1}(t, t - \Delta t) \hat{\Pi}(t) [\hat{W}^{-1}(t, t - \Delta t)]^T.$$

Отсюда следует

$$2 \cosh[\varrho(t - \Delta t)] = [(T_{11})^2 + (T_{21})^2] \exp[\varrho(t)] + [(T_{22})^2 + (T_{12})^2] \exp[-\varrho(t)],$$

где  $\hat{T} = \hat{W}^{-1}(t, t - \Delta t)$  и компоненты берутся в системе координат, где диагональна матрица  $\hat{\Pi}(t)$ . Для больших значений  $\varrho$  мы находим

$$\exp[\varrho(t - \Delta t)] = [(T_{11})^2 + (T_{21})^2] \exp[\varrho(t)]. \quad (13.50)$$

Как и раньше, мы будем использовать модель коротко-коррелированной по времени скорости, обладающей Гауссовой статистикой. На масштабах меньше  $\eta$  корреляции градиента скорости определяются соотношением (13.15), что при  $d = 2$  дает

$$\int_{t_2}^{\infty} dt_1 \langle \sigma_{\alpha\beta}(t_1) \sigma_{\mu\nu}(t_2) \rangle = A [3\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}]. \quad (13.51)$$

Обратим внимание на вращательную инвариантность этого выражения, которое позволяет использовать его в произвольной системе координат, в частности в той, где диагонализирован тензор  $\hat{\Pi}$ . Раскладывая (13.50) по  $\int dt \hat{\sigma}$  до второго порядка и вычисляя средние в соответствии с (13.51), мы находим для  $\Delta\varrho = \varrho(t - \Delta t) - \varrho(t)$ :

$$\langle \Delta\varrho \rangle = 4A\Delta t, \quad \langle (\Delta\varrho)^2 \rangle \equiv \langle (\Delta\varrho - \langle \Delta\varrho \rangle)^2 \rangle = 8A\Delta t,$$

где двойные угловые скобки означают неприводимую корреляционную функцию. Таким образом, мы получаем для  $\varrho$  следующее уравнение с белым шумом в правой части

$$\partial_t \varrho + 4A = \zeta, \quad \langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle = 8A\delta(t_1 - t_2). \quad (13.52)$$

Применяя затем схему, описанную в параграфе 10, мы находим, что плотность вероятности для  $\varrho(t)$  записывается в виде

$$\exp \left[ - \int_{-\infty}^0 dt \frac{(\partial_t \varrho + 4A)^2}{16A} \right],$$

где мы опустили нормировочный множитель.

Таким образом, распределение вероятности  $\theta_a$  (13.46) переписывается в виде функционального интеграла

$$\mathcal{P}(\theta_a) = \int \frac{\mathcal{D}\varrho}{\sqrt{2\pi\Theta}} \exp \left( -\frac{\theta_a^2}{2\Theta} \right) \exp \left[ - \int_{-\infty}^0 dt \frac{(\partial_t \varrho + 4A)^2}{16A} \right], \quad (13.53)$$

где  $\Theta$  определяется выражением (13.49). Мы будем вычислять функциональный интеграл (13.53) в седловом приближении, которое оправдано большой величиной  $\ln(l/a)$ . Эволюция  $\varrho$  (назад по времени) распадается на две стадии. На первой стадии  $e^e < l^2/a^2$ , и интеграл по  $q$  в правой части (13.49) можно заменить на  $\chi_0$ . На второй стадии, когда  $e^e > l^2/a^2$ , правая часть (13.49) является пренебрежимо малой. Промежуточная же стадия, когда  $e^e$  проходит через  $l^2/a^2$ , является короткой в силу экспоненциального характера зависимости  $e^e$  от времени, и потому не вносит существенного вклада в ответ. Таким образом, мы можем записать  $\Theta = \chi_0 \tau$ , где  $\tau$  — длительность первой стадии. Поскольку значение  $\Theta$  не зависит от конкретного поведения  $\varrho(t)$  на обеих стадиях, условие экстремума по  $\varrho$  дает просто  $\partial_t^2 \varrho = 0$ , что означает линейную зависимость  $\varrho$  от времени  $t$ . На второй стадии очевидно  $\partial_t \varrho = -4A$ , иначе разойдется интеграл по времени в (13.53), дав в результате нулевую вероятность. На первой же стадии  $\partial_t \varrho = -(2/\tau) \ln(l/a)$ . Подставляя полученные зависимости в (13.53), мы находим

$$\ln \mathcal{P}(\theta_a) \approx -\frac{[2A\Theta - \chi_0 \ln(l/a)]^2}{4A\chi_0\Theta} - \frac{\theta_a^2}{2\Theta},$$

где мы выразили  $\tau$  через  $\Theta$  из  $\Theta = \chi_0 \tau$ . Полученное выражение необходимо теперь минимизировать по  $\Theta$ , который остался свободным подгоночным параметром. Условие экстремума  $\ln \mathcal{P}$  по  $\Theta$  дает

$$2A\Theta = \sqrt{\chi_0^2 (\ln l/a)^2 + 2A\chi_0 \theta_a^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу для  $\ln \mathcal{P}$ , мы находим окончательно

$$\ln \mathcal{P}(\theta_a) \approx (\sqrt{1+x} - 1) \ln(l/a), \quad (13.54)$$

$$x = \frac{2A\theta_a^2}{\chi_0 [\ln(l/a)]^2}. \quad (13.55)$$

Обсудим асимптотики выражения (13.54), соответствующие малым и большим  $x$ . При  $x \ll 1$  мы находим Гауссово выражение

$$\ln \mathcal{P}(\theta_a) \approx -\frac{A\theta_a^2}{\chi_0 \ln(l/a)}, \quad (13.56)$$

что приводит к следующему выражению для второго момента

$$\langle \theta_a^2 \rangle = \frac{\chi_0}{2A} \ln(l/a).$$

Это выражение соответствует логарифмическому поведению парной корреляционной функции пассивного скаляра в интервале от  $r_d$  до  $\eta$ , установленному в предыдущем разделе. Отметим, что условие применимости выражения (13.56),  $x \ll 1$ , может быть переписано в виде  $\theta_a^2 \ll \langle \theta_a^2 \rangle \ln(l/a)$ . Таким образом, область применимости Гауссового приближения оказывается аномально большой (естественная область его применимости определяется условием  $\theta_a^2 \ll \langle \theta_a^2 \rangle$ ). Объясняется это тем, что  $\theta_a^2$  является суммой большого числа статистически независимых слагаемых (производимых силой  $\phi$ ), число которых  $N$  флуктуирует около  $\ln(l/a)$  (эти флуктуации определяются статистикой размешивания). Так как  $\ln(l/a)$  предполагается большим числом, относительные флуктуации  $N$  невелики.

Рассмотрим теперь предельный случай  $x \gg 1$ . Тогда (13.54,13.55) дают

$$\ln \mathcal{P}(\theta_a) \approx -\sqrt{\frac{2A}{\chi_0}} |\theta_a|.$$

Таким образом, мы находим экспоненциальный хвост функции распределения [72], который спадает гораздо медленнее, чем нормальное (Гауссово) распределение. Это является сигналом того, что хвост “сидит” на редких (нетипичных) событиях. Обратим также внимание на то, что этот хвост не содержит  $\ln(l/r)$ , то есть не зависит от масштаба. Это связано со специальной структурой упомянутых редких событий, которые представляют собой периоды, когда  $\phi = \text{const}$ , а размешивание отсутствует, то есть  $\hat{\sigma} = 0$ . Вероятность такого события является произведением вероятностей (для  $\phi$  и  $\hat{\sigma}$ ), каждая из которых экспоненциально зависит от продолжительности периода  $\tau$ . Таким образом, мы и приходим к экспоненциальному хвосту функции распределения  $\theta_a$ , так как  $\theta_a \propto \tau$ .

Все сказанное выше относится также к одновременным корреляционным функциям  $\theta$  при условии, что все расстояния между точками, в которых берутся  $\theta$ , порядка  $a$ . Это связано со слабой (логарифмической) зависимостью этих корреляционных функций от масштаба при малых  $x$  и универсальной зависимостью, не зависящей от масштаба, при больших  $x$ . При уменьшении  $a$  зависимость корреляционных функций от  $a$  “насыщается” при  $a \sim r_d$ , где вступает в действие диффузия. На меньших масштабах корреляционные функции практически не зависят от  $a$ . Таким образом, одноточечное распределение вероятности  $\theta$  можно получить из (13.54,13.55), если подставить в эти выражения  $a = r_d$ .



## 13.5 Распределение полимеров по длинам

В настоящем разделе мы рассмотрим отдельный сюжет, связанный со статистикой растяжения полимерных молекул в хаотическом потоке [73]. Этот предмет может быть изучен при помощи тех же методов, которые мы применяли выше при изучении пассивного скаляра. Нас будет интересовать хвост функции распределения вероятности полимеров по длинам, соответствующий большим растяжениям полимерных молекул. Форма этого хвоста оказывается тесно связанной со статистикой случайного потока.

Как известно, в жидкости полимерная молекула образует нечто вроде клубка шаровидной формы. При наличии неоднородного течения этот клубок деформируется. Мы будем рассматривать случай, когда такая деформация достаточно сильна, так что клубок превращается в сильно вытянутый эллипсоид. В этом случае деформацию полимерной молекулы можно характеризовать вектором  $\mathbf{R}$ , который представляет собой главную полуось этого эллипсоида (то есть длина этого вектора  $R$  совпадает с длиной полуоси, а его направление определяет ориентацию полуоси в пространстве). Тогда эволюцию вектора  $\mathbf{R}$  можно описывать следующим уравнением [74]

$$\partial_t R_\alpha = R_\beta \nabla_\beta v_\alpha - \frac{1}{\tau} R_\alpha. \quad (13.57)$$

Здесь член с градиентом скорости (взятом в точке расположения полимерной молекулы) представляет воздействие неоднородного потока, стремящегося растянуть молекулу. Последний же член в уравнении (13.57) представляет внутреннюю релаксацию, стремящуюся вернуть молекулу в состояние изотропного (и малого по размерам) клубка. При этом  $\tau$  играет роль времени релаксации. В отсутствии связей мономеров (составляющие полимерную молекулу) двигались бы вдоль Лагранжевых траекторий, а потому их расхождение определялось бы градиентом скорости, что и зафиксировано в первом члене в правой части уравнения (13.57), совпадающим с (13.36). Второй же член вносит поправку в это Лагранжево движение, связанное с взаимодействием мономеров. Если  $R$  много меньше полной длины полимерной молекулы (когда она вытянута “в струнку”), то релаксацию полимерной молекулы можно считать линейной, то есть  $\tau$  в уравнении (13.57) является константой, не зависящей от  $R$ . Именно такой случай мы рассматриваем далее.

Уравнение (13.57) применимо при условии, что размеры полимерной молекулы  $R$  много меньше вязкой длины  $\eta$ . Это позволяет приближать скорость линейным профилем, то есть считать, что градиент скорости не меняется на размере молекулы. Таким образом, динами-

ка полимерной молекулы связана с градиентом скорости, статистика которого определяется корреляциями скорости на масштабах меньше, чем  $\eta$ . Можно считать, что центр тяжести полимерной молекулы движется вдоль некоторой Лагранжевой траектории жидкости. Поэтому мы снова приходим к матрице  $\sigma_{\alpha\beta}(t)$ , которая представляет собой градиент скорости  $\nabla_\beta v_\alpha$ , взятый на некоторой Лагранжевой траектории. Можно выписать формальное решение уравнения (13.57), которое имеет вид

$$\mathbf{R}(t_2) = \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right) \hat{W} \mathbf{R}(t_1), \quad (13.58)$$

где матрица  $\hat{W}$  является той же хронологически упорядоченной экспонентой (13.39). Ее статистика определяется парной корреляционной функцией

$$\int_0^\infty dt \langle \sigma_{\alpha\beta}(t) \sigma_{\mu\nu}(0) \rangle = \frac{A}{d-1} [(d+1)\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}], \quad (13.59)$$

это выражение следует из соотношения (13.15).

Перейдем теперь к рассмотрению статистики  $\rho = \ln(R/R_0)$ , где  $R_0$  – некоторый характерный масштаб, мы будем считать, что это размер недеформированной полимерной молекулы (радиус клубка). Заметим, что уравнение (13.57) применимо только при  $R \gg R_0$ , то есть при больших  $\rho$ . Рассмотрим небольшой промежуток времени  $t_2 - t_1$  (но тем не менее большой по сравнению со временем корреляции скорости). Тогда упорядоченную экспоненту (13.39) можно разложить в ряд. Удерживая, как и раньше, в нем члены первого и второго порядка, мы находим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t_2) \approx & \mathbf{R}(t_1) - \frac{t_2 - t_1}{\tau} \mathbf{R}(t_1) + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2\tau^2} \mathbf{R}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{\sigma}(t) \mathbf{R}(t_1) \\ & - \frac{t_2 - t_1}{\tau} \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{\sigma}(t) \mathbf{R}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \hat{\sigma}(t) \hat{\sigma}(t') \mathbf{R}(t_1). \end{aligned}$$

Отсюда мы находим для изменения  $\rho$

$$\begin{aligned} \rho_2 - \rho_1 \approx & -\frac{t_2 - t_1}{\tau} + \mathbf{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{\sigma}(t) \mathbf{n} - \left[ \mathbf{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{\sigma}(t) \mathbf{n} \right]^2 \\ & + \mathbf{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^t dt' \hat{\sigma}(t) \hat{\sigma}(t') \mathbf{n} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t_2} dt' \hat{\sigma}^T(t) \hat{\sigma}(t') \mathbf{n}, \quad (13.60) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{R}(t_1)/R(t_1)$  и значок  $T$  означает транспонирование. Отсюда

мы получаем, используя соотношение (13.59)

$$\langle(\rho_2 - \rho_1)\rangle \approx (\lambda - 1/\tau)(t_2 - t_1), \quad (13.61)$$

$$\lambda = Ad, \quad (13.62)$$

$$\langle\langle(\rho_2 - \rho_1)^2\rangle\rangle \approx \frac{2\lambda}{d}(t_2 - t_1), \quad (13.63)$$

где двойные угловые скобки означают неприводимую корреляционную функцию.

Как мы уже отмечали, в отсутствие члена с релаксацией уравнение (13.57) описывает эволюцию во времени вектора, концы которого движутся по близким Лагранжевым траекториям. В этом случае коэффициент пропорциональности между  $\langle(\rho_2 - \rho_1)\rangle$  и  $t_2 - t_1$  определяет среднюю логарифмическую скорость разбегания двух близких Лагранжевых траекторий. Эта величина называется обычно Ляпуновской экспонентой (или главной Ляпуновской экспонентой). В наших обозначениях Ляпуновская экспонента равна  $\lambda$  и определяется для введенной нами модели соотношением (13.62).

Соотношения (13.61,13.63) можно использовать для вывода уравнения Фоккера-Планка для плотности вероятности  $P(\rho)$ . Используя схему, приведенную в Приложении А.2, мы получаем

$$\partial_t P + \partial_\rho [(\lambda - 1/\tau)P] - \frac{\lambda}{d} \partial_\rho^2 P = 0. \quad (13.64)$$

Это уравнение имеет следующее стационарное решение

$$P \propto \exp \left[ -d \left( 1 - \frac{1}{\lambda\tau} \right) \rho \right]. \quad (13.65)$$

Таким образом, мы находим экспоненциальное поведение функции распределения вероятности  $\rho$ , справедливое при  $\rho \gg 1$ , что является областью применимости уравнения (13.57). В пересчете на распределение вероятности  $R = R_0 \exp(\rho)$  мы получаем степенной хвост функции распределения, справедливый при  $R \gg R_0$ , то есть для вытянутых молекул.

Обратим внимание на то, что для распределения (13.65) нормировочный интеграл  $\int d\rho P(\rho)$  сходится (на больших  $\rho$ ) только при условии  $\lambda < 1/\tau$ . В противном случае он расходится. Это означает, что большинство полимерных молекул находится в сильно растянутом состоянии, которое не может быть проанализировано в рамках нашего линейного приближения, так как для его описания необходимо принимать во внимание нелинейность релаксации полимерной молекулы. Впрочем, даже при  $\lambda > 1/\tau$  выражение (13.65) имеет смысл, давая

левый хвост функции распределения молекул по размерам, определяющий распределение по размерам “умеренно” растянутых молекул, динамика которых подчиняется линейному уравнению. Таким образом, при  $\lambda = 1/\tau$  происходит переход, который заключается в том, что подавляющее большинство молекул переходит из нерастянутого состояния в состояние сильно растянутое [75]. Такого рода переход должен наблюдаться при увеличении интенсивности случайного потока.

### 13.6 Итоги, обобщения и проблемы.

Весь проделанный выше анализ статистики пассивного скаляра в случайном поле скорости был выполнен в рамках модели Крайчнана, то есть в предположении, что поле скорости является коротко коррелированным во времени (иными словами, характерное время размешивания пассивного скаляра много больше времени корреляции скорости) и обладает Гауссовой статистикой. Для реальной турбулентности и то, и другое предположения далеки от реальности. Тем не менее, можно надеяться, что ответы, полученные для модели Крайчнана, по крайней мере качественно справедливы и для реального пассивного скаляра в турбулентном потоке. А именно, можно ожидать, что в инерционном интервале масштабов  $\eta < r < L$  корреляционные функции пассивного скаляра степенным образом зависят от времени и расстояний между точками, а в интервале  $r < \eta$  степенная зависимость от координат сменяется логарифмической (возможная стадия, когда в интервале  $r < \eta$  корреляционные функции пассивного скаляра экспоненциально затухают по времени при степенной зависимости от координат, обладает малой длительностью).

Статистика пассивного скаляра является перемежаемой, то есть его высокие корреляционные функции “сидят” на редких событиях (нетипичных флуктуациях), которые приводят к значениям этих корреляционных функций, значительно больших, чем их Гауссова оценка (через парную корреляционную функцию). Выше мы продемонстрировали эту перемежаемость на примере мелкомасштабной статистики пассивного скаляра, она характерна не только для коротко коррелированной скорости [76]. Перемежаемость вообще характерна для систем, находящихся далеко от равновесия (типа турбулентного потока), и нет сомнения, что перемежаема статистика пассивного скаляра в реальном турбулентном потоке.

Можно уточнить постановку задачи о перемежаемости пассивного скаляра в инерционном интервале  $\eta < r < L$ . Для этого вводятся так называемые структурные функции пассивного скаляра  $S_n(r)$ , которые

обладают степенным поведением:

$$S_n(r) = \langle [\theta(\mathbf{r}) - \theta(0)]^n \rangle \propto r^{\zeta_n},$$

справедливым на масштабах меньше, чем длина корреляции  $l$  вброса (мы считаем  $l < L$ ). Как показывает эксперимент

$$S_n(r) \sim [S_2(r)]^{n/2} \left( \frac{l}{r} \right)^{n\zeta_2/2 - \zeta_n},$$

Таким образом, перемежаемость растет с уменьшением масштаба (при увеличении  $l/r$ ). Общие соотношения типа неравенства Шварца приводят к выводу, что зависимость  $\zeta_n$  от  $n$  выкладываются на выпуклую вверх функцию, то есть отклонение от Гауссовой оценки растет с увеличением номера  $n$ . Упомянутое выше поведение можно назвать аномальным скейлингом, так как  $\zeta_n \neq (n/2)\zeta_2$ . Подобный аномальный скейлинг наблюдается и для корреляционных функций турбулентной скорости [68]. В рамках модели Крайчнана наличие аномального скейлинга было доказано в двух предельных случаях: при  $\gamma \rightarrow 2$  и  $d \rightarrow \infty$  [71]. Хотя оба эти случая являются нефизическими, важно было продемонстрировать теоретически само наличие такого явления.

Почувительно сравнить аномальный скейлинг для пассивного скаляра (и турбулентной скорости) и для параметра порядка  $\varphi$  вблизи точки фазового перехода второго рода. Например, корреляционная функция  $\langle \langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle \rangle$ , которая определяет аномальный вклад в теплоемкость, обладает аномальным скейлингом. А именно, при  $r \ll r_c$

$$\langle \langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle \rangle \sim (\Lambda r)^{-\Delta} \langle \varphi(\mathbf{r}) \varphi(0) \rangle^2,$$

где  $\Delta > 0$ , то есть  $\langle \langle \varphi^2(\mathbf{r}) \varphi^2(0) \rangle \rangle$  много меньше, чем  $\langle \varphi(\mathbf{r}) \varphi(0) \rangle^2$ . Мы видим, что этот аномальный скейлинг связан с ультрафиолетовой обрезкой, в то время как для пассивного скаляра (и турбулентной скорости) он связан с инфракрасным (самым большим) масштабом задачи. Поэтому, в частности, ренорм-группа не применима к турбулентным задачам.

В отличие от инерционного интервала, где модель Крайчнана работает в лучшем случае качественно, в интервале  $r < \eta$  ее предсказания уже являются “полуколичественными”. В частности, выводы о логарифмическом характере корреляционных функций пассивного скаляра, об аномально большом интервале Гауссовости и об экспоненциальных хвостах функций распределения вероятности скаляра остаются справедливыми и в общем случае, для произвольной статистики скорости. Отметим также недавно открытое хаотическое состояние полимерных растворов – так называемую эластическую турбулентность

[60], где скорость является гладкой на всех масштабах (меньше, чем размер сосуда). К этому случаю относятся все выводы, сделанные нами для пассивного скаляра в интервале  $r < \eta$ .

## Задачи

### Задача 13.1

Найти функцию Грина уравнения (13.23). Для функции  $\Phi$  предполагаются нулевые условия при  $z = 0$  и  $z \rightarrow \infty$ .

#### Решение задачи 13.1

Для упрощения формул мы полагаем здесь  $A = 1$ . Гриновская функция  $G(t, z, x)$  удовлетворяет следующему уравнению

$$\left[ \partial_t - \left( \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right] G = \delta(t) \delta(z - x). \quad (13.66)$$

Делая преобразование Лапласа, мы получаем из уравнения (13.66)

$$\left[ s - \left( \partial_z^2 + \frac{1}{z} \partial_z - \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right] G_s = \delta(z - x), \quad (13.67)$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа. При  $z < x$  Гриновская функция должна быть пропорциональна решению однородного уравнения, которое остается конечным при  $z \rightarrow 0$ , то есть  $I_\nu(\sqrt{s}z)$  ( $I_\nu$  – функция Бесселя мнимого аргумента). При  $z > x$  Гриновская функция должна быть пропорциональна решению однородного уравнения, которое стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , то есть  $K_\nu(\sqrt{s}z)$  ( $K_\nu$  – функция Макдональда). Учитывая выражение для Вронскиана (определителя Вронского), можно найти коэффициенты пропорциональности, и мы получаем

$$G_s = \begin{cases} -x I_\nu(\sqrt{s}z) K_\nu(\sqrt{s}x) & z < x, \\ -x I_\nu(\sqrt{s}x) K_\nu(\sqrt{s}z) & z > x. \end{cases} \quad (13.68)$$

Производя теперь обратное преобразование Лапласа, мы находим при  $z < x$

$$G = -x \int \frac{ds}{2\pi i} \exp(st) I_\nu(\sqrt{s}z) K_\nu(\sqrt{s}x),$$

где интеграл идет вдоль мнимой оси. Этот интеграл является табличным, он дает

$$G = \frac{x}{2t} I_\nu \left( \frac{zx}{2t} \right) \exp \left( -\frac{z^2 + x^2}{4t} \right). \quad (13.69)$$

Такое же выражение получается и при  $z > x$ . Таким образом, выражение (13.69) и является решением уравнения (13.66).

## Заключение

Тепловые флуктуации для макроскопических величин обычно бывают пренебрежимыми, но в определенных условиях могут оказаться существенными. Мы рассмотрели ряд случаев, когда флуктуации макроскопических (крупномасштабных) величин в конденсированной среде играют важную роль в формировании физических свойств системы. В основном мы изучали равновесное состояние среды, когда флуктуации вызываются тепловым движением. В то же время роль крупномасштабных флуктуаций резко возрастает, если система находится в неравновесном состоянии. Классическим примером такого рода является гидродинамическая турбулентность, реализующимся при больших числах Рейнолдса, когда амплитуда флуктуаций скорости оказывается намного больше тепловых флуктуаций. К сожалению, турбулентность находится вне рамок настоящего курса, поскольку она является большой областью науки, которой посвящены сотни статей и десятки монографий. Тем не менее, мы разобрали несколько примеров неравновесных систем, которые могут быть исследованы только с привлечением их динамики. Таким образом, настоящий курс содержит не только информацию о заявленных в оглавлении явлениях, но и также и общий подход, который, как мы надеемся, поможет читателю самостоятельно выйти за круг этих явлений.

Автор благодарит И. В. Колоколова, прочитавшего рукопись лекций и сделавшего ряд важных замечаний.

# А

## Приложения

### А.1 Гауссовы интегралы

В статистике важную роль играет доказанная Гауссом центральная предельная теорема, согласно которой сумма большого числа случайных величин обладает нормальным распределением вероятности, то есть логарифм функции распределения вероятности является квадратичной формой от флуктуирующей переменной. Тогда ее моменты и определяются Гауссовыми интегралами. Центральная предельная теорема допускает обобщение на случай произвольного числа флуктуирующих переменных, чем и определяется значительная роль Гауссовых интегралов в статистике. Кроме того, Гауссовы интегралы возникают при построении теории возмущений. Здесь мы кратко перечислим их основные свойства.

Мы начнем с простейшего случая, когда имеется единственная скалярная флуктуирующая переменная  $x$ , и мы интересуемся ее моментами  $\langle x^n \rangle$ , определяемыми Гауссовой функцией распределения вероятности:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx N^{-1} \exp(-ax^2/2) x^n. \quad (\text{A.1})$$

Здесь  $N$  – нормировочная константа, определяемая условием  $\langle 1 \rangle = 1$ , то есть

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-ax^2/2) = \sqrt{2\pi/a}. \quad (\text{A.2})$$

Конечно, моменты (А.1) (которые отличны от нуля только для четных  $n$ ) можно вычислить непосредственно. Однако поучительно вычислить эти величины, введя так называемую производящую функцию  $\mathcal{Z}$  для



моментов  $x$ :

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \langle \exp(\lambda x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n \langle x^n \rangle. \quad (\text{A.3})$$

Таким образом, моменты  $x$  являются коэффициентами разложения производящего функционала  $\mathcal{Z}(\lambda)$  в ряд по  $\lambda$ . Для Гауссовой функции распределения производящая функция может быть найдена явно:

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx N^{-1} \exp(-ax^2/2 + \lambda x) = \exp[\lambda^2/(2a)]. \quad (\text{A.4})$$

Сравнивая между собой коэффициенты разложения в (A.3) и (A.4), мы находим

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} a^{-n}. \quad (\text{A.5})$$

Предположим теперь, что  $x$  – комплексная переменная. Тогда Гауссову функцию распределения с положительно определенной вероятностью можно записать в следующем виде  $N^{-1} \exp(-a|x|^2)$ , где нормирующая константа равна

$$N = \int d\text{Re}x d\text{Im}x \exp(-a|x|^2) = \frac{\pi}{a}. \quad (\text{A.6})$$

После этого мы находим для производящей функции

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda) &= \langle \exp(\lambda x^* + \bar{\lambda} x) \rangle = \\ &= N^{-1} \int d\text{Re}x d\text{Im}x \exp(-a|x|^2 + \lambda x^* + \bar{\lambda} x) = \exp(\lambda \bar{\lambda} / a), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Переменные  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$  (разложение по которым производящей функции дает корреляционные моменты  $x$  и  $x^*$ ) удобно считать независимыми переменными. Далее, раскладывая соотношение (A.7) по  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$ , мы находим

$$\langle |x|^{2n} \rangle = n! a^{-n}, \quad (\text{A.8})$$

вместо (A.5).

Обобщим теперь приведенные формулы для случая, когда имеется  $K$  действительных переменных  $x_i$ . Тогда общий вид Гауссовой функции распределения имеет вид  $N^{-1} \exp(-x_i A_{ij} x_j / 2)$ , где  $A$  – симметричная положительно определенная матрица (то есть матрица, имеющая все положительные собственные значения). Интегралы с этой функцией распределения могут быть сведены к произведению одномерных Гауссовых интегралов, если произвести ортогональное преобразование, диагонализующее матрицу  $A$ . В результате, например, для

нормировочной константы мы находим

$$N = \int d^K x \exp(-x_i A_{ij} x_j / 2) = \frac{(2\pi)^{K/2}}{\sqrt{\det A}}, \quad (\text{A.9})$$

где детерминант  $\det A$  возникает, как произведение собственных значений матрицы  $A$ . Далее, тем же способом вычисляется производящая функция

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda_i) &= \langle \exp(\lambda_i x_i) \rangle = \\ &= N^{-1} \int d^K x \exp(-x_i A_{ij} x_j / 2 + \lambda_i x_i) = \exp(\lambda_i A_{ij}^{-1} \lambda_j), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

где  $A^{-1}$  означает матрицу, обратную к  $A$ . Отсюда следует в частности, что корреляционная функция третьего порядка (как и всех нечетных порядков) равна нулю. Раскладывая соотношение (A.10) по  $\lambda_i$ , мы находим, например, для парной корреляционной функции и корреляционной функции четвертого порядка

$$F_{ij} = \langle x_i x_j \rangle = A_{ij}^{-1}, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle x_i x_j x_k x_m \rangle = F_{ij} F_{km} + F_{ik} F_{jm} + F_{im} F_{jk}. \quad (\text{A.12})$$

Поскольку производящий функционал (A.10) имеет вид

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \exp(\lambda_i F_{ij} \lambda_j),$$

все корреляционные функции  $x_i$ , подобно (A.12), сводятся к парной корреляционной функции (A.11). В общем виде (для произвольного четного порядка) мы имеем

$$\langle x_i x_j \dots x_k x_m \rangle = F_{ij} \dots F_{km} + \dots, \quad (\text{A.13})$$

где суммирование ведется по всем произведениям парных корреляционных функций, которые получаются в результате разных способов “спаривания” в произведении  $x_i x_j \dots x_k x_m$ , подобно (A.12). Правило (A.13) называется обычно теоремой Вика.

Теперь мы переходим к случаю, когда имеется  $K$  комплексных переменных  $x_i$ . Тогда Гауссову функцию распределения с положительно определенной вероятностью можно записать в следующем виде  $N^{-1} \exp(-x_i^* A_{ij} x_j)$ , где  $A$  – эрмитова положительно определенная матрица (то есть матрица, имеющая все положительные собственные значения). Интегралы с этой функцией распределения могут быть сведены к произведению одномерных Гауссовых интегралов (с комплексной переменной), если произвести унитарное преобразование, диагонализующее матрицу  $A$ . В результате, например, для нормировочной

константы мы находим

$$N = \int d^K \text{Re} x d^K \text{Im} x \exp(-x_i^* A_{ij} x_j) = \frac{\pi^K}{(\det A)^K}. \quad (\text{A.14})$$

Далее, действуя таким же способом, мы находим

$$F_{ij} = \langle x_i x_j^* \rangle = A_{ij}^{-1}, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \langle \exp(\bar{\lambda}_i x_i + \lambda_i x_i^*) \rangle = \exp(\bar{\lambda}_i F_{ij} \lambda_j). \quad (\text{A.16})$$

Раскладывая по  $\lambda, \bar{\lambda}$  соотношение (A.16), мы находим

$$\langle x_i x_j x_k^* x_m^* \rangle = F_{ik} F_{jm} + F_{im} F_{jk}, \quad (\text{A.17})$$

вместо (A.12). Общее же правило заключается в том, что отличны от нуля только те корреляционные функции, которые получаются усреднением произведения одинаковых количеств переменных  $x$  и  $x^*$ , причем

$$\langle x_i x_j \dots x_k^* x_m^* \rangle = F_{ik} F_{jm} \dots + \dots \quad (\text{A.18})$$

Здесь суммирование, как и в (A.13), идет по всем произведениям парных корреляционных функций, которые получаются в результате разных способов “спаривания” в произведении  $x_i x_j \dots x_k^* x_m^*$ , подобно (A.17), если под спариванием понимать образование парной корреляционной функции из  $\langle x x^* \rangle$ . Таким образом, теорема Вика работает и для комплексных переменных.

Все сказанное выше может быть непосредственно обобщено и на случай полей, поскольку любое поле может быть представлено, как совокупность большого, но конечного числа компонент. Например, роль этих компонент могут играть коэффициенты разложения поля в ряд Фурье, где суммирование ограничено “ультрафиолетовой” обрезкой  $\Lambda$  (предельным волновым вектором). Аналог производящей функции для полей называется производящим функционалом, для действительного поля  $\varphi$  он равен

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda) &= \left\langle \exp \left[ \int d^d r \lambda(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \right] \right\rangle \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^d r_1 d^d r_2 \lambda(\mathbf{r}_1) F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \lambda(\mathbf{r}_2) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (\text{A.20})$$

где мы предположили пространственную однородность. Для комплекс-

ного поля  $\psi$  надо внести некоторые поправки:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(\lambda) &= \left\langle \exp \left[ \int d^d r \bar{\lambda}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + \lambda(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}) \right] \right\rangle \\ &= \exp \left[ \int d^d r_1 d^d r_2 \bar{\lambda}(\mathbf{r}_1) F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \lambda(\mathbf{r}_2) \right],\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

$$F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \psi(\mathbf{r}_1) \psi^*(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (\text{A.22})$$

Как и ранее, высшие корреляционные функции полей  $\varphi$  и  $\psi$  выражаются через парные корреляционные функции (A.20) и (A.22) в соответствии с теоремой Вика. А именно, для действительного поля  $\varphi$  среднее равно

$$\begin{aligned}\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \dots \varphi(\mathbf{r}_{2n-1}) \varphi(\mathbf{r}_{2n}) \rangle \\ = F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \dots F(\mathbf{r}_{2n-1} - \mathbf{r}_{2n}) + \dots,\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

где суммирование ведется по всем произведениям парных корреляционных функций, которые получаются в результате разных способов “спаривания” в произведении  $\varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \dots \varphi(\mathbf{r}_{2n-1}) \varphi(\mathbf{r}_{2n})$ . Например

$$\begin{aligned}\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_4) \rangle &= F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) F(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \\ &+ F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) + F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3).\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

Для комплексного же поля

$$\langle \psi(\mathbf{r}_1) \dots \psi^*(\mathbf{r}_{2n}) \rangle = F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{n+1}) F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{n+2}) \dots + \dots, \quad (\text{A.25})$$

где суммирование идет по всем произведениям парных корреляционных функций, которые получаются в результате разных способов “спаривания” в произведении  $\psi(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \dots \psi^*(\mathbf{r}_{2n-1}) \psi^*(\mathbf{r}_{2n})$ , если под спариванием понимать образование парной корреляционной функции из  $\langle \psi \psi^* \rangle$ . Например

$$\begin{aligned}\langle \psi(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_2) \psi^*(\mathbf{r}_3) \psi^*(\mathbf{r}_4) \rangle &= F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \\ &+ F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3).\end{aligned}\quad (\text{A.26})$$

Таким образом, в Гауссовом случае задача сводится к отысканию парной корреляционной функции флуктуирующего поля. Покажем, как это можно сделать в том случае, когда эффективная энергия (показатель экспоненты в распределении Гаусса) является интегралом от локального по полям выражения.

Мы начнем с комплексного поля. Рассмотрим к качестве примера Гауссову функцию распределения  $N^{-1} \exp(-\mathcal{H})$  с эффективной энергией

$$\mathcal{H} = \int d^d r (a|\psi|^2 + b|\nabla\psi|^2).$$

Фурье-преобразование

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \quad (\text{A.27})$$

превращает поле  $\psi$  в набор комплексных коэффициентов  $\psi_{\mathbf{q}}$ , а эффективную энергию в сумму

$$\mathcal{H} = V \sum_{\mathbf{q}} (a + bq^2) |\psi_{\mathbf{q}}|^2, \quad (\text{A.28})$$

где  $V$  – объем системы. Нормировочная же константа  $N$  равна

$$N = \prod_{\mathbf{q}} d\text{Re}\psi_{\mathbf{q}} d\text{Im}\psi_{\mathbf{q}} \exp(-\mathcal{H}) = \prod_{\mathbf{q}} \frac{\pi}{(a + bq^2)V}. \quad (\text{A.29})$$

Далее, мы находим из (A.28)

$$\langle |\psi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = V^{-1} (a + bq^2)^{-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \langle \psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \psi^*(\mathbf{r}_1) \rangle = \sum_{\mathbf{q}} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{V(a + bq^2)} \\ &\rightarrow \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{(a + bq^2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

где мы использовали обычный способ преобразования суммы по волновым векторам в интеграл, справедливое, если характерный волновой вектор много больше обратного размера системы. Выражение (A.30) определяет парную корреляционную функцию комплексного поля.

Для действительного поля  $\varphi(\mathbf{r})$  Фурье-компоненты  $\varphi_{\mathbf{q}}$  являются комплексными величинами:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}). \quad (\text{A.31})$$

Однако надо быть аккуратным, поскольку для действительного поля  $\varphi(\mathbf{r})$  имеет место соотношение  $\varphi_{-\mathbf{q}} = \varphi_{\mathbf{q}}^*$ . Поэтому величины  $\varphi_{\mathbf{q}}$  не являются независимыми. При интегрировании по  $\varphi_{\mathbf{q}}$  можно ограничиться половиной обратного пространства, тогда  $\text{Re}\varphi_{\mathbf{q}}$  и  $\text{Im}\varphi_{\mathbf{q}}$  можно считать независимыми величинами. Рассмотрим в качестве примера Гауссову функцию распределения  $N^{-1} \exp(-\mathcal{H})$  с

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^d r [a\varphi^2 + b(\nabla\varphi)^2] = V \sum'_{\mathbf{q}} (a + bq^2) |\varphi_{\mathbf{q}}|^2, \quad (\text{A.32})$$

где штрих при знаке суммы означает, что суммирование идет по половине обратного пространства. Нормировочная константа  $N$  равна

$$N = \prod_q' d\text{Re}\varphi_q d\text{Im}\varphi_q \exp(-\mathcal{H}) = \prod_q' \frac{\pi}{(a + bq^2)V}, \quad (\text{A.33})$$

где штрих при знаке произведения означает, как и выше, что произведение берется по половине обратного пространства. Далее, мы находим из (A.32)

$$\langle (\text{Re}\varphi_q)^2 \rangle = \langle (\text{Im}\varphi_q)^2 \rangle = \frac{1}{2V(a + bq^2)},$$

то есть  $\langle \varphi_q \varphi_{-q} \rangle = (a + bq^2)^{-1} V^{-1}$ . Отсюда мы получаем

$$\langle \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_1) \rangle = \sum_q \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{V(a + bq^2)} \rightarrow \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{(a + bq^2)}, \quad (\text{A.34})$$

где мы использовали тот же способ преобразования суммы по волновым векторам в интеграл.

Выше мы рассмотрели частный случай эффективной энергии. Тем не менее, общий прием – переход к Фурье-компонентам, который превращает эффективную энергию в сумму слагаемых относящихся к этим Фурье-компонентам, работает и для произвольной эффективной энергии  $\mathcal{H}$  является интегралом от локального по полям выражения. При этом множитель  $a + bq^2$  заменяется на какую-то другую функцию  $q$ , которая диктуется конкретным видом функции распределения. В развитую схему легко включается время (просто, как дополнительная координата). Кроме того ясно, что сформулированная схема тривиально обобщается на случай многокомпонентных полей.

## А.2 Уравнение Фоккера-Планка

В настоящем приложении мы рассмотрим так называемое уравнение Фоккера-Планка, которое относится к системам, которые подвергаются воздействию величин, хаотически изменяющихся со временем. Динамика подобных систем описывается уравнениями, в которых присутствуют Ланжевеновские (случайные) силы, такие уравнения называют обычно стохастическими. В этом случае не имеет смысла изучать решение динамических уравнений при данном значении случайной силы (как обычно говорят, при данной ее реализации), а имеет смысл рассматривать величины, усредненные по многим реализациям. Обычно поведение решения при данной реализации случайной силы на больших временах (на временах, намного превышающих время корреляции

случайной силы) близко к усредненному. Можно оценить и типичное отклонение от среднего.

Мы начнем с простейшего случая, когда имеется всего одна координата  $x$ , подчиняющаяся следующему стохастическому уравнению

$$\partial_t x = g(x) + \zeta(t), \quad (\text{A.35})$$

где  $g(x)$  – некоторая функция  $x$ , а  $\zeta(t)$  – случайная функция времени. Такого сорта уравнение возникает, например, при анализе Броуновского движения частицы во внешнем поле (тогда  $x$  – координата этой частицы). Мы будем считать, что  $\zeta(t)$  – белый шум, то есть что переменная  $\zeta(t)$  коротко коррелирована по времени. Тогда среднее по реализациям шума может быть записано в следующем виде

$$\langle \zeta \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle = 2C \delta(t_1 - t_2), \quad (\text{A.36})$$

где  $C$  – некоторая константа, характеризующая мощность шума.

Объект, который нас будет интересовать – функция распределения вероятности  $\mathcal{P}(t, x)$ , нормированная условием

$$\int dx \mathcal{P}(t, x) = 1, \quad (\text{A.37})$$

которое означает, что суммарная вероятность найти частицу в какой-либо точке равна единице. Будем считать, что при  $t = 0$  значение  $x$  фиксировано:  $x = x_0$ . Тогда при  $t = 0$   $\mathcal{P}(x) = \delta(x - x_0)$ . Затем  $x$  начинает изменяться со временем в соответствии с уравнением (A.35). При рассмотрении многих реализаций шума  $\zeta(t)$  получается много разных траекторий, то есть возникает неопределенность в положении частицы. Эта неопределенность и приводит к описанию в терминах функции распределения вероятности  $\mathcal{P}(t, x)$ . Если она известна, то можно, например, вычислить среднее (по реализациям шума) значение  $x$ :

$$\langle x(t) \rangle = \int dx \mathcal{P}(t, x) x. \quad (\text{A.38})$$

Аналогичным образом определяются высшие моменты:

$$\langle x^n(t) \rangle = \int dx \mathcal{P}(t, x) x^n. \quad (\text{A.39})$$

Отклонения же  $x$  от среднего значения характеризуется среднеквадратичным отклонением

$$\langle\langle x^2(t) \rangle\rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (\text{A.40})$$

Для величины  $\mathcal{P}(t, x)$  можно получить динамическое уравнение. Для этого рассмотрим изменение  $x$  на некотором небольшом, но конечном интервале времени  $\Delta t$ . Из уравнения (А.35) находим для данной реализации шума

$$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} dt' [g(x) + \zeta(t')]. \quad (\text{А.41})$$

Величина  $\mathcal{P}(x) dx$  определяет вероятность того, что при усреднении по реализациям шума траектория попадет в интервал  $dx$ . Поскольку шум предполагается коротко-коррелированным по времени, усреднение, ведущее к  $\mathcal{P}(t + \Delta t, x)$ , можно производить независимо на временных интервалах  $(0, t)$  и  $(t, t + \Delta t)$ . Первое из этих усреднений дает  $\mathcal{P}(t, x)$ , а второе позволяет перейти от  $\mathcal{P}(t, x)$  к  $\mathcal{P}(t + \Delta t, x)$ . Поэтому имеет место соотношение

$$\mathcal{P}(t + \Delta t, x) dx = \langle \mathcal{P}(t, x - \Delta x) d(x - \Delta x) \rangle, \quad (\text{А.42})$$

где в правой части происходит усреднение по статистике шума на временном интервале  $(t, t + \Delta t)$ . Раскладывая это соотношение по  $\Delta x$  и  $\Delta t$  и сохраняя главные члены этого разложения, мы получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{P}(t, x) \Delta t &= -\partial_x \mathcal{P}(t, x) g(x) \Delta t - \mathcal{P}(t, x) \partial_x g(x) \Delta t \\ &- \left\langle \partial_x \mathcal{P}(t, x) \int_t^{t+\Delta t} dt' \zeta(t') \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle \partial_x^2 \mathcal{P}(t, x) \int_t^{t+\Delta t} dt_1 dt_2 \zeta(t_1) \zeta(t_2) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{А.43})$$

Учитывая теперь соотношения (А.36) и сокращая на  $\Delta t$ , мы находим окончательно

$$\partial_t \mathcal{P} = -\partial_x (g \mathcal{P}) + C \partial_x^2 \mathcal{P}. \quad (\text{А.44})$$

Это и есть уравнение Фоккера-Планка. Отметим, что правая часть уравнения (А.44) имеет вид полной производной. Это приводит к сохранению интеграла  $\int dx \mathcal{P}(x)$ , то есть гарантирует сохранение нормировки (А.37).

Альтернативным способом вывода уравнения (А.44) является переход к дискретному времени, когда вместо уравнения (А.35) мы используем разностную схему

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = [g(x_n) + \zeta_n] \epsilon, \quad (\text{А.45})$$

где  $\epsilon$  - шаг по времени. Аналогом же соотношений (А.36) является

$$\langle \zeta_n \zeta_m \rangle = \frac{C}{\epsilon} \delta_{nm}, \quad \langle \zeta_n \rangle = 0. \quad (\text{А.46})$$



Выражения (А.46) показывают, что реализации шума на разных шагах не коррелируют, то есть усреднение на каждом шаге можно производить независимо. Это ведет к соотношению

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) dx = \langle \mathcal{P}_n(t, x - \Delta x) d(x - \Delta x) \rangle, \quad (\text{А.47})$$

которое является аналогом (А.42). Раскладывая правую часть уравнения (А.47) и производя усреднение с помощью (А.46), мы находим дискретный аналог (А.44):

$$\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_n = [-\partial_x(g\mathcal{P}_n) + C\partial_x^2\mathcal{P}_n] \epsilon. \quad (\text{А.48})$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера случай линейной “силы”  $g$ :  $g = -Gx$ , где  $G > 0$ . Тогда уравнение Фоккера-Планка (А.44) имеет следующее решение

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{G}{2\pi C[1 - \exp(-2Gt)]}} \exp \left\{ -\frac{Gx^2}{2C[1 - \exp(-2Gt)]} \right\}, \quad (\text{А.49})$$

которое соответствует начальному условию  $\mathcal{P}(0, x) = \delta(x)$ . Мы видим, что сначала функция распределения “расплывается”, а затем выходит на стационарное решение

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{G}{2\pi C}} \exp \left\{ -\frac{Gx^2}{2C} \right\}. \quad (\text{А.50})$$

которое определяется балансом двух членов в правой части (А.44). Спрашивается, насколько типично такое поведение? Первоначальное “расплывание” вполне универсально, так как оно обязано действию “диффузионного” члена в (А.44). Дальнейшая же судьба  $\mathcal{P}$  зависит от вида зависимости  $g(x)$ . Можно формально выписать стационарное решение уравнения Фоккера-Планка, которое является решением уравнения (А.44) с нулевой левой частью:

$$\mathcal{P} = \exp \left[ \int dx \frac{g(x)}{C} \right]. \quad (\text{А.51})$$

Конечно, для  $g = -Gx$  это решение совпадает с (А.50). Если интеграл по  $x$  от правой части (А.51) сходится, то это стационарное решение реализуется на больших временах. При этом постоянная интегрирования определяется условием нормировки  $\int dx \mathcal{P} = 1$ . Если же интеграл по  $x$  от правой части (А.51) расходится, то никакого стационара  $\mathcal{P}$  не достигает, “расплываясь” неограниченно. Именно такое поведение наблюдается, например, для  $g = -Gx$ , где  $G < 0$ . Соответствующее

решение уравнения (А.44) определяется той же формулой (А.49), где теперь  $G < 0$ .

Приведенную схему легко обобщить на случай, когда переменная, фигурирующая в стохастическом уравнении, имеет несколько компонент. Тогда исходное уравнение (А.35), соотношение (А.36) и уравнение Фоккера-Планка (А.44) приобретают следующий вид

$$\partial_t x_i = g_i(x) + \zeta_i(t), \quad (\text{А.52})$$

$$\langle \zeta_i \rangle = 0, \quad \langle \zeta_i(t_1) \zeta_j(t_2) \rangle = 2C_{ij} \delta(t_1 - t_2), \quad (\text{А.53})$$

$$\partial_t \mathcal{P} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (g_i \mathcal{P}) + C_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mathcal{P}. \quad (\text{А.54})$$

Стационарное решение уравнения (А.54) найти далеко не так просто, как в одномерном случае. Это возможно в важном случае, когда  $g_i$  является градиентом некоторого потенциала, а матрица  $C$  пропорциональна единичной матрице:  $C_{ij} \propto \delta_{ij}$ . Пусть  $g_i = -\partial U / \partial x_i$ ,  $C_{ij} = T \delta_{ij}$ . Тогда стационарное решение (А.54) имеет вид

$$\mathcal{P} \propto \exp(-U/T). \quad (\text{А.55})$$

Таким образом  $T$  играет роль температуры, входящей в распределение Гиббса с данным потенциалом  $U$ . Отметим, что то же самое распределение Гиббса (А.55) будет решением стационарного уравнения (А.54), если  $g_i = -\partial U / \partial x_i + \bar{g}_i$ , где  $\bar{g}_i$  удовлетворяет двум условиям:  $\partial \bar{g}_i / \partial x_i = 0$  и  $\bar{g}_i \partial U / \partial x_i = 0$ .

Приведенная схема обобщается и дальше, ее можно распространить на непрерывный предел, поскольку любое поле  $\varphi$  можно рассматривать, как набор большого, но конечного числа степеней свободы (например, Фурье-гармоник). Тогда в  $\mathbf{r}$ -представлении мы находим вместо (А.52-А.54)

$$\partial_t \varphi(t, \mathbf{r}) = g(t, \mathbf{r}) + \zeta(t, \mathbf{r}), \quad (\text{А.56})$$

$$\langle \zeta(t_1, \mathbf{r}_1) \zeta(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle = 2T \hat{\Xi} \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (\text{А.57})$$

$$\partial_t \mathcal{P} = - \int d^d r \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{r})} [g(\mathbf{r}) \mathcal{P}] + T \int d^d r \frac{\delta^2}{\delta \varphi(\mathbf{r}) \delta \varphi(\mathbf{r})} \mathcal{P}, \quad (\text{А.58})$$

где  $\langle \zeta \rangle = 0$ ,  $g$  считается функционалом  $\varphi$ , а  $\hat{\Xi}$  — некоторый пространственный положительно определенный оператор, применяемый в (А.56) к  $\mathbf{r}_1$ . Распределение Гиббса (А.55) является решением уравнения (А.58), если выполняются следующие условия

$$g(\mathbf{r}) = -\hat{\Xi} \frac{\delta U}{\delta \varphi(\mathbf{r})} + \bar{g}(\mathbf{r}), \quad (\text{А.59})$$

$$\int d^d r \frac{\delta \bar{g}(\mathbf{r})}{\delta \varphi(\mathbf{r})} = 0, \quad \int d^d r \frac{\delta U}{\delta \varphi(\mathbf{r})} \bar{g}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{А.60})$$

Как правило, макроскопические динамические уравнения (гидродинамические уравнения) имеют вид (А.59) и удовлетворяют условиям (А.60), что и ведет к распределению Гиббса (А.55).

Подчеркнем, однако, что уравнение Фоккера-Планка описывает не только релаксацию к равновесию, но и стохастическую динамику системы, которая далека от равновесия. Кроме того, оно может быть использовано для анализа систем, которые вообще не приближаются к статистическому равновесию (например, открытых систем). В этом случае стационарное распределение не имеет вида распределения Гиббса или вообще не достигается со временем.

### А.3 Упорядоченная экспонента

В настоящем приложении мы даем краткую сводку свойств так называемой хронологически упорядоченной экспоненты. Этот объект естественным образом возникает в самых разных задачах, от линейной алгебры до статистической физики и квантовой теории поля. Он связан с линейными эволюционными задачами, когда оператор эволюции не коммутирует в различные моменты времени, что создает определенные трудности в решении такого сорта задач. В то же время именно хронологически упорядоченная экспонента наиболее удобна при проведении различного рода усреднений, как по квантовым, так и по классическим флуктуациям.

Рассмотрим задачу, которая заключается в отыскании решения линейного уравнения

$$\partial_t \varphi = \hat{\mathcal{L}} \varphi, \quad (\text{А.61})$$

где  $\hat{\mathcal{L}}$  – некоторый линейный оператор, который зависит от времени  $t$ . В уравнении (А.61)  $\varphi$  может быть вектором (то есть иметь ограниченное число компонент) или полем (то есть зависеть от некоторого количества координат). В первом случае  $\hat{\mathcal{L}}$  является матрицей, а во втором – дифференциальным или интегральным оператором. Далее мы изучаем общие свойства  $\varphi(t)$ , которые не зависят от его конкретной реализации.

Формальное решение уравнения (А.61) может быть записано в следующем виде

$$\varphi(t_2) = \hat{W}(t_2, t_1) \varphi(t_1), \quad (\text{А.62})$$

где оператор  $\hat{W}$  удовлетворяет следующему уравнению и начальному условию

$$\partial_t \hat{W}(t, t_1) = \hat{\mathcal{L}}(t) \hat{W}(t, t_1), \quad \hat{W}(t_1, t_1) = 1. \quad (\text{А.63})$$

Именно оператор (матрица)  $\hat{W}$  называется хронологически упорядоченной экспонентой, и обозначается часто следующим образом

$$\hat{W}(t_2, t_1) = T \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{\mathcal{L}}(t) \right\}. \quad (\text{A.64})$$

Подчеркнем, что хронологически упорядоченная экспонента (A.64) сводится к обычной экспоненте только в том случае, когда операторы  $\hat{\mathcal{L}}(t)$  коммутируют между собой в различные моменты времени. Именно возможная некоммутативность  $\hat{\mathcal{L}}(t)$  мотивирует введение  $T \exp$ .

Название хронологически упорядоченная экспонента может быть объяснено, если мы перейдем к дискретному представлению уравнения (A.61):

$$\varphi_{j+1} - \varphi_j = \epsilon \hat{\mathcal{L}}_j \varphi_j, \quad (\text{A.65})$$

где  $\epsilon$  – шаг по времени. Тогда вместо соотношения (A.62) мы находим

$$\varphi_k = (1 + \epsilon \hat{\mathcal{L}}_{k-1}) \dots (1 + \epsilon \hat{\mathcal{L}}_j) \varphi_j, \quad (\text{A.66})$$

где  $k > j$ . Таким образом,  $\varphi_k = W_{kj} \varphi_j$ , где  $W_{kj}$  представляется в виде хронологически упорядоченного по времени произведения факторов  $1 + \epsilon \hat{\mathcal{L}}_j$ . Обратим внимание на то, что каждый из этих факторов также можно интерпретировать, как экспоненту, поскольку при малых  $\epsilon$

$$1 + \epsilon \hat{\mathcal{L}}_j \approx \exp(\epsilon \hat{\mathcal{L}}_j).$$

Произведение этих экспонент может быть записано в виде экспоненты от суммы только в том случае, когда  $\hat{\mathcal{L}}_j$  коммутируют между собой. Это выражает на дискретном языке уже сформулированное нами выше свойство.

Отметим мультипликативность хронологически упорядоченной экспоненты:

$$\hat{W}(t, t_0) = \hat{W}(t, t_1) \hat{W}(t_1, t_0), \quad (\text{A.67})$$

где  $t > t_1 > t_0$ . Это свойство является простым следствием представления (A.62). Чтобы обосновать (A.67), необходимо сначала рассмотреть решение уравнения (A.61) на интервале  $(t_0, t_1)$ , что дает  $\varphi(t_1) = \hat{W}(t_1, t_0) \varphi(t_0)$ , а затем рассмотреть его решение на интервале  $(t_1, t)$ , используя  $\varphi(t_1)$ , как начальное условие. В результате мы получим  $\varphi(t) = \hat{W}(t, t_1) \hat{W}(t_1, t_0) \varphi(t_0)$ , что и ведет к (A.67). Свойство мультипликативности (A.67) становится почти очевидным, если обратиться к дискретному представлению (A.66).

Уравнение (A.61) или (A.62) можно решать последовательными итерациями, подставляя на  $n + 1$ -ом шаге в правую часть уравнения его решение, полученное на предыдущем,  $n$ -том, шаге. В результате

мы находим для хронологически упорядоченной экспоненты следующий ряд

$$\begin{aligned} \hat{W}(t, t_0) = 1 &+ \int_{t_0}^t dt_1 \hat{\mathcal{L}}(t_1) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{\mathcal{L}}(t_1) \hat{\mathcal{L}}(t_2) \\ &+ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \hat{\mathcal{L}}(t_1) \hat{\mathcal{L}}(t_2) \hat{\mathcal{L}}(t_3) + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Обратим внимание на хронологическое упорядочение операторов  $\hat{\mathcal{L}}(t)$  в каждом члене ряда (A.68). Этот ряд может быть использован для исследования хронологически упорядоченной экспоненты на небольших разностях времен  $t - t_0$ . Для больших же промежутков времени никаких общих способов исследования Тexp нет, ее поведение сильно зависит от конкретных свойств  $\hat{\mathcal{L}}(t)$ . Ниже мы разбираем два случая, когда такое исследование является возможным.

Будем считать, что  $\hat{\mathcal{L}}$  – действительная матрица  $n \times n$ , случайно меняющаяся со временем. Тогда хронологически упорядоченная экспонента  $\hat{W}(t, t_0)$  также является действительной матрицей  $n \times n$ . Изучим поведение ее собственных значений  $e^{\rho_i}$  на временах, намного превышающих время корреляции  $\hat{\mathcal{L}}(t)$ , и считая, что статистика матрицы  $\hat{\mathcal{L}}$  является изотропной. Приведем матрицу  $\hat{W}(t, t_0)$  к следующему виду

$$\hat{W}(t, t_0) = \hat{R} \hat{D} \hat{O}, \quad (\text{A.69})$$

где  $\hat{D}$  – диагональная матрица (с компонентами  $e^{\rho_i}$ ), а  $\hat{R}$  и  $\hat{O}$  – ортогональные матрицы. Перейдем теперь от времени  $t$  к времени  $t'$ . Тогда мы получаем из (A.67)

$$\hat{W}(t', t_0) = \hat{W}(t', t) \hat{R} \hat{D} \hat{O}.$$

Если время  $t'$  близко к  $t$  и, соответственно,  $\hat{W}(t', t)$  близко к единице, то

$$\exp(\rho'_i) = [\hat{O} \hat{W}(t', t) \hat{R}]_{ii} \exp(\rho_i).$$

Из этого соотношения мы получаем

$$\partial_t \rho_i = [\hat{O} \hat{\mathcal{L}}(t) \hat{R}]_{ii}.$$

Если статистика матрицы  $\hat{\mathcal{L}}$  является изотропной, то в правой части этих соотношений стоят случайные функции со статистикой, не зависящей от  $\rho_i$ . Поэтому набор  $\rho_i$  удовлетворяет условию применимости Центральной предельной теоремы [2]. В частности, на промежутках  $t - t_0$ , много больших времени корреляции  $\hat{\mathcal{L}}(t)$ , типичным поведением  $\rho_i$  является линейный рост (или убывание) со временем, а собственные

значения  $\hat{W}(t, t_0)$ , соответственно, зависят от времени экспоненциально [77].

Приведем теперь вывод уравнения Фоккера-Планка (А.44), используя понятие хронологически упорядоченной экспоненты. Функцию распределения вероятности  $\mathcal{P}$  величины, подчиняющейся стохастическому уравнению (А.35), можно записать в виде

$$\mathcal{P}(y) = \langle \delta(x - y) \rangle, \quad (\text{А.70})$$

где усреднение идет по статистике шума  $\zeta$ . Следствием (А.35) является следующее уравнение

$$\partial_t \delta(x - y) = -[g(x) + \zeta(t)] \partial_y \delta(x - y).$$

Подставим здесь  $g(x) \partial_y \delta(x - y) = \partial_y [g(y) \delta(x - y)]$ , после чего решение уравнения можно записать в следующем виде

$$\delta(x - y) = T \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \partial_y [g(y) + \zeta(t')] \right\} \delta(x_0 - y). \quad (\text{А.71})$$

Подставляя это выражение в (А.70), мы получаем

$$\mathcal{P}(y) = \left\langle T \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \partial_y [g(y) + \zeta(t')] \right\} \mathcal{P}_0(y) \right\rangle. \quad (\text{А.72})$$

Воспользовавшись теперь мультипликативностью хронологически упорядоченной экспоненты, а также короткой коррелированностью  $\zeta$ , что позволяет производить независимые усреднения по разным временным интервалам, мы получаем, что (А.72) справедливо для произвольного интервала  $(t_0, t)$ . Полагая этот временной интервал малым и раскладывая  $T \exp$  до второго порядка в соответствии с (А.68), мы получаем (А.43), и далее уравнение Фоккера-Планка (А.44).

# Литература

- [1] R. Kubo, *Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [2] R. Ellis, *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*, Springer Verlag, 1985.
- [3] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, т. V, Статистическая физика, Москва, Наука, 1976.
- [4] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B* **241**, 333 (1984).
- [5] Р. Бэкстер, Точно решаемые модели в статистической механике, Москва, Мир, 1985.
- [6] Abrikosov A. A., Khalatnikov I. M., and Landau L. D., *Nuovo Cimento, Suppl.*, **3**, 80 (1956).
- [7] H. W. Wyld, *Ann. Phys. (N.Y.)* **14**, 134 (1961).
- [8] Л. Д. Ландау, К теории фазовых переходов, *ЖЭТФ* **7**, 19-32 (1937); *ЖЭТФ* **7**, 627-632 (1937); L. D. Landau, *Phys. Z. Sowjet.*, **11**, 26 (1937).
- [9] В. Н. Попов, Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, Атомиздат, Москва, 1976.
- [10] А. А. Славнов и Л. Д. Фаддеев, Введение в квантовую теорию калибровочных полей, Москва, Наука, 1978.
- [11] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков и И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Добросвет, 1998.
- [12] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, т. IX, Е. М. Лифшиц и Л. П. Питаевский, Статистическая физика, часть 2, Москва, Наука, 1978.

- [13] И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, Москва, Наука, 1971.
- [14] А. З. Паташинский и В. Л. Покровский, Флуктуационная теория фазовых переходов, Москва, Наука, 1982.
- [15] Sh. K. Ma, Modern theory of critical phenomena, Benjamin, New York, 1976.
- [16] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, т. IV, В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц и Л. П. Питаевский, Квантовая электродинамика, Москва, Наука, 1980.
- [17] Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Квантовые поля, Наука, Москва, 1980.
- [18] М. Пескин и Д. Шредер, Введение в квантовую теорию поля, РХД, 2001.
- [19] А. П. Леванюк, К теории рассеяния света вблизи точек фазового перехода второго рода, ЖЭТФ, **36**, 810-818, 1959.
- [20] B. D. Josephson, Equation of state near the critical point, J. Phys. C **2**, 1113-1115, 1969.
- [21] K. G. Wilson and J. Kogut, The renormalization group and the  $\epsilon$ -expansion, Phys. Rep. **12**, 75-199 (1974).
- [22] H. Kleinert, Gauge Fields in Condensed Matter, World Scientific, Singapore, 1989.
- [23] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Clarendon, Oxford, 1996.
- [24] L. Kadanoff, Statistical Physics, Statics, Dynamics and Renormalization, World Scientific, Singapore, 2000.
- [25] K. G. Wilson and M. E. Fisher, Critical Exponents in 3.99 Dimensions, Phys. Rev. Lett. **28**, 240-243 (1972); K. G. Wilson, Feynman-Graph Expansion for Critical Exponents, Phys. Rev. Lett. **28**, 548-551 (1972).
- [26] А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, Фазовый переход в одноосных сегнетоэлектриках, ЖЭТФ, **56**, 2087-2098 (1969).
- [27] E. I. Kats, V. V. Lebedev, and A. R. Muratov, Weak crystallization theory, Phys. Rep., **228**, 1-91 (1993).



- [28] С. А. Бразовский, Фазовый переход изотропной системы в неоднородное состояние, *ЖЭТФ*, **68**, 175-185 (1975) [*Sov. Phys. JETP*, **41**, 85 (1975)].
- [29] G. Grinstein and R. A. Pelcovits, Anharmonic Effects in Bulk Smectic Liquid Crystals and Other "One-Dimensional Solids", *Phys. Rev. Lett.* **47**, 856-859 (1981); Nonlinear elastic theory of smectic liquid crystals, *Phys. Rev. A* **26**, 915-925, (1982).
- [30] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория упругости, Москва, Наука, 1987.
- [31] A. M. Polyakov, Interaction of goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields, *Phys. Lett. B* **59**, 79-81 (1975).
- [32] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны, Из-во ИТФ им. Л. Д. Ландау, 1995.
- [33] П. Б. Вигман, Точное решение  $O(3)$  нелинейной  $\sigma$ -модели в двух измерениях, *Письма в ЖЭТФ*, **41**, 79-85 (1985); A. M. Polyakov and P. B. Wiegmann, Theory of nonabelian goldstone bosons in two dimensions, *Phys. Lett. B* **131**, 121-126 (1983).
- [34] J. Meuner, D. Langevin and N. Boccara, Physics of amphiphilic layers, *Springer Proceedings in Physics*, **21**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [35] S. A. Safran and N. A. Clark, Physics of complex and supermolecular fluids, Wiley, New York, 1987.
- [36] D. Nelson, T. Pivian, and S. Weinberg, Statistical mechanics of membranes and surfaces, World Scientific, Singapore, 1989.
- [37] P. B. Canham, The minimum energy as a possible explanation of the concave shape of the human red blood cell, *J. Theor. Biol.* **26**, 61-81 (1970).
- [38] W. Helfrich, Elastic Properties of Lipid Bilayers: Theory and Possible Experiments, *Z. Naturforsch C* **28**, 693-703 (1973).
- [39] P. G. de Gennes and C. Taupin, Microemulsions and the flexibility of oil/water interfaces, *J. Chem. Phys.* **86**, 2294-2304 (1982).
- [40] W. Helfrich, Effect of thermal undulations on the rigidity of fluid membranes and interfaces, *J. de Phys.* **46**, 1263-1268 (1985); L. Peliti and S. Leibler, Effects of Thermal Fluctuations on Systems with Small Surface Tension, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1690-1693 (1985); D.

- Föster, On the scale dependence, due to thermal fluctuations, of the elastic properties of membranes, *Phys. Lett. A* **114**, 115-120 (1986); H. Kleinert, Thermal softening of curvature elasticity in membranes, *Phys. Lett. A* **114**, 263-268 (1986); A. M. Polyakov, Fine structure of strings, *Nucl. Phys. B* **268**, 406-412 (1986); H. Kleinert, Size distribution of spherical vesicles, *Phys. Lett. A* **116**, 57-62 (1986).
- [41] В. Л. Березинский, Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии; I Классические системы, *ЖЭТФ*, **59**, 907-920 (1970) [*Sov. Phys. JETP* **32**, 493 (1971)]; II Квантовые системы, *ЖЭТФ* **61**, 1144-1156 (1971) [*Sov. Phys. JETP* **34**, 610 (1972)].
- [42] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids (Application of dislocation theory), *J. Phys. C* **5**, L124-L126 (1972); Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems, *J. Phys. C* **6**, 1181-1203 (1973).
- [43] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *Progress in Low Temperature Physics*, ed. D. F. Brewer, v. VII B, p. 373 (North-Holland, Amsterdam, 1978).
- [44] D. R. Nelson, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, ed. by E. G. D. Cohen, v. V, p. 53 (North Holland, N. Y., 1980).
- [45] D. R. Nelson, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz, v. 7, p. 1 (Academic, London, 1983).
- [46] P. Minnhagen, The two-dimensional Coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1001-1066 (1987).
- [47] Z. Gulacsi, M. Gulacsi, Theory of phase transitions in two-dimensional systems, *Adv. Phys.* **47**, 1-89 (1998).
- [48] B. I. Halperin and D. R. Nelson, Theory of Two-Dimensional Melting, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 121-124 (1978); **41**, 519 (1978); A. P. Young, Melting and the vector Coulomb gas in two dimensions, *Phys. Rev. B* **19**, 1855-1866 (1979); D. R. Nelson and B. I. Halperin, Dislocation-mediated melting in two dimensions, *Phys. Rev. B* **19**, 2457-2484 (1979).
- [49] K. J. Strandburg, Two-dimensional melting, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 161-207 (1988).

- [50] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1201-1205 (1977).
- [51] B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Theory of dynamic critical phenomena, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435-479, 1977.
- [52] P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose, Statistical Dynamics of Classical Systems, *Phys. Rev. A* **8**, 423-437 (1973).
- [53] C. de Dominicis, *J. Phys. (Paris) Colloq* **37**, C1-247 (1976).
- [54] H. K. Janssen, Lagrangian for Classical Field and Renormalization Group Calculations of Dynamical Critical Properties, *Z. Phys. B* **23**, 377-380 (1976).
- [55] C. de Dominicis and L. Peliti, Field-theory renormalization and critical dynamics above  $T_c$ : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems, *Phys. Rev. B* **18**, 353-376 (1978).
- [56] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Dynamic Scaling of Growing Interfaces, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889-892, 1986.
- [57] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Vortices in high-temperature superconductors, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125-1388 (1994).
- [58] D. Forster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid, *Phys. Rev. A* **16**, 732-749 (1977).
- [59] Е. И. Кац и В. В. Лебедев, *Динамика жидких кристаллов*, Москва, Наука, 1988; E. I. Kats and V. V. Lebedev, *Fluctuational Effects in the Dynamics of Liquid Crystals*, Springer-Verlag, N.Y., 1993.
- [60] A. Groisman and V. Steinberg, Elastic turbulence in a polymer solution flow, *Nature* **405**, 53-55 (2000); Stretching of Polymers in a Random Three-Dimensional Flow, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 934-937 (2001); Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives, *Nature* **410**, 905-907 (2001).
- [61] G. K. Batchelor, Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity, *JFM* **5**, 113-133 (1959).
- [62] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

- [63] R. H. Kraichnan, Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, *Phys. Fluids* **11**, 945-953 (1968).
- [64] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Statistics of a passive scalar advected by a large-scale two-dimensional velocity field: Analytic solution. *Phys. Rev. E* **51**, 5609-5627 (1995).
- [65] B. I. Shraiman and E. D. Siggia, Scalar turbulence, *Nature* **405**, 639-646 (2000).
- [66] G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola, Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 913-975 (2001).
- [67] В. И. Кляцкин, Динамика стохастических систем, Москва, Физматлит, 2002.
- [68] U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, New York (1995).
- [69] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge Mass. (1975).
- [70] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Гидродинамика, Москва, Наука, 1986.
- [71] B. I. Shraiman and E. D. Siggia, Anomalous Scaling and Small Scale Anisotropy of a Passive Scalar in Turbulent Flow, *CRAS* **321**, Ser. II, 279-284 (1995); K. Gawędzki and A. Kupiainen, Anomalous Scaling of the Passive Scalar, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3834-3837 (1995); M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov and V. Lebedev, Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar, *Phys. Rev. E* **52**, 4924-4921 (1995).
- [72] B. I. Shraiman, E. D. Siggia, Lagrangian path integrals and fluctuations in random flow Boris I. Shraiman, *Phys. Rev. E* **49**, 2912-2927 (1994).
- [73] M. Chertkov, Polymer Stretching by Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4761-4764 (2000); E. Balkovsky, A. Fouxon, and V. Lebedev, Turbulent Dynamics of Polymer Solutions, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4765-4768 (2000).
- [74] R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, 2nd ed. Vol. 2, Wiley, New York, 1987.

- [75] J. L. Lumley, Drag reduction by additives, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **1**, 367-384 (1969); Drag reduction in turbulent flow by polymer additives, *J. Polymer Sci.: Macromolecular Reviews* **7**, 263-290 (1973).
- [76] E. Balkovsky and A. Fouxon, Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem, *Phys. Rev. E* **60**, 4164-4174 (1999).
- [77] H. Furstenberg, Noncommuting Random Products, *Trans. Am. Math. Soc.* **108**, 377 (1963).

# Оглавление

Аннотация .....	2
Предисловие .....	2
Введение .....	3
<b>1 Теория Ландау</b> .....	<b>9</b>
1.1 Разложение Ландау .....	10
1.2 Теория среднего поля .....	14
1.3 Низкотемпературная фаза .....	17
<b>2 Теория возмущений</b> .....	<b>24</b>
2.1 Разложение по константе взаимодействия .....	25
2.2 Теория возмущений ниже точки перехода .....	31
2.3 Скейлинг .....	34
<b>3 Паркетные диаграммы</b> .....	<b>39</b>
3.1 Флуктуационные поправки в $d = 4$ .....	40
3.2 Ренормированные величины .....	43
3.3 Трикритическая точка .....	47
<b>4 Ренорм-группа, <math>\epsilon</math>-разложение</b> .....	<b>57</b>
4.1 Выделение быстрых переменных .....	57
4.2 Ренорм-групповые уравнения .....	62
4.3 $\epsilon$ -разложение .....	65
<b>5 Слабая кристаллизация</b> .....	<b>71</b>
5.1 Функционал Ландау .....	72
5.2 Флуктуационные эффекты .....	77
5.3 Фазовая диаграмма .....	80
<b>6 Флуктуации в смектиках</b> .....	<b>87</b>
6.1 Функционал Ландау .....	88
6.2 Структурный фактор .....	90

6.3	Ренорм-групповые уравнения . . . . .	93
6.4	Дислокации в смектике . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Двумерные ферромагнетики</b>	<b>107</b>
7.1	Флуктуации направления намагниченности . . . . .	107
7.2	Ренорм-группа . . . . .	111
7.3	Большие $N$ . . . . .	116
<b>8</b>	<b>Физика мембран</b>	<b>119</b>
8.1	Энергия мембраны . . . . .	119
8.2	Флуктуации мембран . . . . .	124
8.3	Вывод РГ-уравнений для везикулы . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Фазовый переход БКТ</b>	<b>136</b>
9.1	Производящий функционал . . . . .	137
9.2	РГ-уравнения . . . . .	143
9.3	Завихренность и теплоемкость . . . . .	149
<b>10</b>	<b>Критическая динамика</b>	<b>151</b>
10.1	Эффективное действие . . . . .	151
10.2	Техника Уайлда . . . . .	158
10.3	Ренорм-групповая процедура . . . . .	164
<b>11</b>	<b>Проблема KPZ</b>	<b>169</b>
11.1	Флуктуации . . . . .	169
11.2	Ренорм-группа . . . . .	176
11.3	Скейлинг . . . . .	180
11.4	Преобразование Коула-Хопфа . . . . .	182
<b>12</b>	<b>Двумерная гидродинамика</b>	<b>188</b>
12.1	Уравнение Навье-Стокса . . . . .	189
12.2	Свободно подвешенные пленки . . . . .	195
12.3	Флуктуационное затухание . . . . .	199
<b>13</b>	<b>Пассивный скаляр</b>	<b>207</b>
13.1	Модель Крайчнана . . . . .	208
13.2	Эволюция пассивного скаляра . . . . .	212
13.3	Стационарная статистика . . . . .	216
13.4	Мелкомасштабная статистика . . . . .	219
13.5	Распределение полимеров по длинам . . . . .	225
13.6	Итоги, обобщения и проблемы. . . . .	228
	Закключение . . . . .	231

<b>А Приложения</b>	<b>232</b>
А.1 Гауссовы интегралы . . . . .	232
А.2 Уравнение Фоккера-Планка . . . . .	238
А.3 Упорядоченная экспонента . . . . .	243
Литература . . . . .	247